

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
UNIVERZITA KOMENSKÉHO  
BRATISLAVA

Katedra jadrovej fyziky

**Excitácie mnohonukleónových systémov  
v zriedkavých jadrových procesoch**

Dizertačná práca

RNDr. Martin Šmotlák

Bratislava 2003



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Súčasný stav problematiky</b>	<b>10</b>
2.1	Dvojitý beta-rozpad jadra . . . . .	10
2.1.1	Experimentálne skúmanie $\beta\beta$ -rozpadu jadier . . . . .	11
2.1.2	Dvojneutrínový dvojitý beta-rozpad a štruktúra jadra . . . . .	14
2.2	Jadrové modely . . . . .	19
2.2.1	Vrstvový model. Monte Carlo vrstvový model . . . . .	20
2.2.2	QRPA a jej modifikácie . . . . .	21
2.2.3	Tamm–Dancoffova aproximácia . . . . .	27
2.2.4	Metóda expanzie prechodového operátora . . . . .	27
2.3	Štúdie v rámci schématických modelov . . . . .	29
2.3.1	Protón-neutrónový Lipkinov model . . . . .	29
2.3.2	QRPA a Pauliho vylučovací princíp . . . . .	31
2.3.3	Semiklasický opis excitácie mnohonukleónového systému . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Ciele práce</b>	<b>38</b>
<b>4</b>	<b>Nové metódy a dosiahnuté výsledky</b>	<b>42</b>
4.1	QRPA s optimálnym základným stavom . . . . .	42
4.1.1	Základné charakteristiky nového prístupu . . . . .	42
4.1.2	Test a aplikácia novej metódy vo výpočtoch $\beta$ a $\beta\beta$ prechodov . . . . .	44
4.1.3	Diskusia . . . . .	54
4.2	QRPA s nelineárnym fonónovým operátorom . . . . .	55
4.2.1	QRPA a reprodukcia nepárnych vzbudených stavov . . . . .	56
4.2.2	TDA a reprodukcia párnych vzbudených stavov . . . . .	65
4.2.3	Diskusia . . . . .	73
4.3	Rozptyľové členy hamiltoniánu. Plne renormalizovaná QRPA . . . . .	75
4.3.1	Plne renormalizovaná QRPA metóda . . . . .	78
4.3.2	Numerické výpočty a výsledky . . . . .	80
4.3.3	Diskusia . . . . .	87
4.4	Greenove funkcie $\beta\beta$ -rozpadu v integrálnej reprezentácii . . . . .	89
4.4.1	Fyzikálna zložka maticového elementu $\beta\beta$ -prechodu . . . . .	89

4.4.2	Výsledky . . . . .	93
4.4.3	Diskusia . . . . .	96
4.5	QRPA s perturbatívnym splnením Pauliho princípu . . . . .	97
4.5.1	Charakteristika metódy . . . . .	98
4.5.2	Jednoduché a dvojité $\beta$ -prechody, $2\nu\beta\beta$ -rozpad $^{76}\text{Ge}$ . . .	103
4.5.3	Diskusia . . . . .	113
<b>5</b>	<b>Záver</b>	<b>115</b>
<b>A</b>	<b>BCS rovnica</b>	<b>120</b>
<b>B</b>	<b>Marumoriho bozónové mapovanie fermiónových operátorov</b>	<b>122</b>
<b>C</b>	<b>Modelové matice a elementy v schématických výpočtoch</b>	<b>124</b>
C.1	Maticové elementy pre QRPA s optimálnym základným stavom . . .	124
C.2	Nelineárne QRPA a TDA elementy . . . . .	125
C.3	Matice plne renormalizovanej QRPA metódy . . . . .	129
C.4	Elementy z integrálneho výpočtu $\beta$ - a $\beta\beta$ -prechodov . . . . .	130
	<b>Literatúra</b>	<b>132</b>
	<b>Zoznam publikácií</b>	<b>138</b>
	<b>Summary</b>	<b>139</b>

# Kapitola 1

## Úvod

Zriedkavé jadrové procesy predstavujú exkluzívnu tému v súčasnej jadrovej fyzike. Ich teoretické štúdium spolu s dostupnými experimentálnymi dátami umožňuje získavať dôležité informácie pri hľadaní novej fyziky za štandardným modelom. Zásadnou požiadavkou pri určovaní pravdepodobnosti zriedkavej jadrovej premeny je presný a hodnoverný opis štruktúry jadier zúčastnených v danom procese. Spoločnou vlastnosťou skúmaných jadrových prechodov je totiž výrazná citlivosť predpovedaných polčasov premien na výpočet jadrových maticových elementov. Aj preto spoľahlivý opis štruktúry jadra, t.j. mnohonukleónových sústav, patrí v súčasnosti medzi hlavné problémy fyziky atómového jadra.

Jednu z mnohých motivácií, ktoré stimulujú vývoj nových mnohonukleónových metód, predstavuje *dvojitý beta-rozpad* ( $\beta\beta$ -rozpad) jadier [HS84]. Tento zriedkavý jadrový proces je dôležitý nielen z hľadiska rôznych aspektov jadrovej fyziky, ale aj z hľadiska platnosti postulátov štandardného modelu elektroslabých interakcií (ŠM) a možnej existencie novej fyziky mimo jeho rámca. Rozlišujeme *dvojneutrínový mód*  $\beta\beta$ -rozpadu ( $2\nu\beta\beta$ -rozpad), v ktorom sú spolu s elektrónmi emitované aj ich antineutrína, a *bezneutrínový mód* ( $0\nu\beta\beta$ -rozpad), kde dochádza len k emisii dvoch elektrónov.

$2\nu\beta\beta$ -rozpad bol priamo detekovaný na viacerých jadrách [TZ02]. Z meraného polčasu premeny vyplýva experimentálna hodnota jadrového maticového elementu, ktorú môžeme konfrontovať s teoretickými predpoveďami, pričom pravdepodobnosť  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu je daná súčinom fázového faktora a jadrového maticového elementu pre tento prechod [HS84].  $2\nu\beta\beta$ -premena predstavuje citlivý test pre správnosť opisu jadrovej štruktúry v rámci daného modelu.

Bezneutrínový mód  $\beta\beta$ -rozpadu nie je dovolený v ŠM, lebo nezachováva leptónový náboj. Mnohé rozšírenia ŠM (teórie veľkého zjednotenia, supersymetrické teórie a ďalšie) predpokladajú slabé narušenie zachovania leptónového náboja a poskytujú viacero mechanizmov pre opis  $0\nu\beta\beta$ -premeny. Pravdepodobnosť  $0\nu\beta\beta$ -prechodu je daná súčinom fázového faktora, kvadrátu jadrových maticových elementov a parametrov súvisiacich s narušením leptónového náboja [DKT85; FŠ98] (efektívna hmotnosť Majoranovských neutrín, parametre pravých tokov, R-paritu narušujúce parametre supersymetrických teórií...).  $0\nu\beta\beta$  jadrové maticové elemen-

ty vyžadujú konštrukciu tých istých vlnových funkcií ako v prípade  $2\nu\beta\beta$ -premeny. V súčasnosti existuje prvá experimentálna evidencia bezneutrínového módu  $\beta\beta$ -rozpadu na jadre  $^{76}\text{Ge}$  [KK<sup>+</sup>02], ktorá je zatiaľ predmetom preverovania a diskusií. Sú tiež známe dolné ohraničenia na polčasy rozpadov mnohých ďalších izotopov. Z hľadiska získania čo najpresnejších obmedzení na parametre nezachovania leptónového náboja je dôležitý presný a spoľahlivý výpočet príslušných jadrových maticových elementov.

Pre opis  $\beta\beta$ -jadrových prechodov boli použité rozličné metódy [HS84; FŠ98; ZBR90; L<sup>+</sup>95]. Jednou z nich je *vrstvomý model*, ktorý je schopný úspešne vysvetliť základné vlastnosti a charakteristiky ľahkých jadier. Avšak  $\beta\beta$ -rozpad prebieha na stredne ťažkých a ťažkých jadrách s komplikovanou štruktúrou. V rámci vrstvomého modelu, ktorý dobre opisuje nízko ležiace kolektívne excitácie jadier, nie je možné skonštruovať úplnú sústavu vzbudených stavov prechodového jadra, potrebnú pri určení amplitúdy  $\beta\beta$ -premeny. Aj pre najľahšie jadrové systémy podliehajúce  $\beta\beta$ -rozpadu sa nezaobídeme bez podstatného ohraničenia modelového priestoru konfiguračných stavov, čo značne ovplyvňuje hodnotu výsledného maticového elementu.

Pre výpočet jadrových prechodov  $\beta\beta$ -rozpadu sa v súčasnosti najviac používa **kvázičasticové priblíženie náhodných fáz** (QRPA)<sup>1</sup> [VZ86; CFT87]. Napriek tomu, že táto jadrovo-štruktúrna metóda a jej modifikácie sa úspešne používajú už mnoho rokov, ich predpovedaciu schopnosť znižuje fakt, že počítané maticové elementy  $\beta\beta$ -prechodu (DBME) citlivo závisia od parametrov jadrového hamiltoniánu (konkrétne od faktora  $g^{pp}$ , ktorým sa renormalizuje časticovo-časticový kanál zbytkovej interakcie). V oblasti fyzikálnej hodnoty časticovo-časticovej interakcie ( $g^{pp} \approx 1$ ) sú DBME veľmi nestabilné už pri malej zmene parametra  $g^{pp}$  [CFT87]. Na dôvažok riešenie QRPA v okolí  $g^{pp} = 1$  kolabuje (t.j. najnižšia excitačná energia mnohonukleónového systému sa stáva imaginárnou a teda nefyzikálnou) [EVZ88]. Predpokladaným dôvodom je narušenie Pauliho vylučovacieho princípu v rámci QRPA, ako aj nezachovanie počtu častíc vo vlnových funkciách [Š<sup>+</sup>00]. Renormalizovaná QRPA metóda (RQRPA) [TS95; ŠŠF96] čiastočne berie do úvahy Pauliho princíp, čím znižuje citlivosť DBME na vzrastajúcu silu časticovo-časticovej interakcie. Nedostatkom RQRPA však je, že nespĺňa Ikedovo sumačné pravidlo [K<sup>+</sup>97; HHC96]. Nerieši tiež problém neekvivalentnosti vzbudených stavov prechodového jadrového systému, konštruovaných z počiatočného a konečného jadra (podobne ako aj QRPA).

Otázka opisu jadrovej štruktúry a výpočtu Greenových funkcií  $\beta$  a  $\beta\beta$ -prechodov je preto stále otvorená a aktuálna. Náplňou nášho štúdia je vývoj nových mnohonukleónových metód na opis jadrovej štruktúry s cieľom prispieť k riešeniu vyššie spomenutých problémov pri výpočte jednoduchých a dvojitéch  $\beta$ -prechodov v rámci existujúcich QRPA modifikácií a tiež skúmať dôsledky a vplyv jednotlivých použitých priblížení na predpovedané fyzikálne veličiny. V práci je prezentovaných päť projektov:

---

<sup>1</sup>z anglického Quasiparticle Random Phase Approximation

1. *QRPA s optimálnym základným stavom*
2. *QRPA s nelineárnym fonónovým operátorom*
3. *Rozptylové členy hamiltoniánu. Plne renormalizovaná QRPA*
4. *Greenove funkcie  $\beta\beta$ -rozpadu v integrálnej reprezentácii*
5. *QRPA s perturbatívnym splnením Pauliho princípu.*

Motiváciou prvého projektu sú štúdie [CHH97; R<sup>+</sup>00], ktoré vysvetľujú nestabilitu a kolaps maticových elementov  $\beta\beta$ -premeny v oblasti fyzikálnych hodnôt  $g^{pp}$  fázovým prechodom (reorganizáciou nukleónov v jadre) a hľadajú nové riešenia v zmenenom (deformovanom) základnom stave jadra. Indikácia tohto javu má pôvod v semiklasickom opise mnohonukleónových systémov [R<sup>+</sup>00]. Zmena štruktúry základného stavu a s ňou spojené nové riešenia boli dosiaľ nájdené len v semiklasických výpočtoch. Našou snahou je zlepšiť opis základného stavu jadra v rámci QRPA tak, aby jeho vlnová funkcia mohla byť určená variačne a súčasne umožňovala nájsť nové QRPA riešenia (módy) v oblasti za kritickou hodnotou  $g^{pp}$  (určenou kolapsom štandardnej QRPA). Táto idea je zrealizovaná v predkladanom modeli *QRPA s optimálnym základným stavom*.

V práci [Š<sup>+</sup>00] je prezentované štúdium rôznych QRPA metód a skúmaná úloha Pauliho vylučovacieho princípu v nich. Používa sa tu schématický protón-neutrónový Lipkinov hamiltonián [SS97]. V tomto modeli, ktorý bol navrhnutý na štúdium jednoduchých a dvojitých beta-prechodov, existujú presné výsledky pre skúmané fyzikálne veličiny. Uvedený schématický hamiltonián dovoľuje formulovať QRPA metódu s exaktným splnením Pauliho princípu (EPP-QRPA). Hodnoty maticového elementu  $2\nu\beta\beta$ -prechodu počítané pomocou EPP-QRPA sa však v oblasti  $g^{pp}$  za kolapsom štandardnej QRPA metódy začínajú výrazne líšiť od presných čísel získaných pomocou diagonalizácie použitého hamiltoniánu. Predpokladaným dôvodom diskutovaným v [Š<sup>+</sup>00] je jednoduchý–lineárny tvar dosiaľ používaného fonónového operátora na konštrukciu vzbudených stavov jadra. Druhý projekt dizertačnej práce je zameraný na budovanie QRPA formalizmu, v ktorom je použitá originálna nelineárna štruktúra excitačného fonónového operátora. Aplikácia nových vyvinutých postupov v konkrétnych výpočtoch ukazuje, že použitie adekvátneho stupňa nelinearity vo fonónovom operátore v QRPA metóde vedie k riešeniam, ktoré reprodukovujú presné výsledky dané diagonalizáciou modelového hamiltoniánu.

V treťom projekte sa sústreďujeme na skúmanie úlohy takzvaných rozptylových členov v modelovom hamiltoniáne pri QRPA výpočtoch jednoduchých a dvojitých  $\beta$ -prechodov s dôrazom na otázku platnosti Ikedovho sumačného pravidla [IUY65]. Rozptylové operátory sú pri prepise jadrového hamiltoniánu do kvázičasticovej reprezentácie zanedbané, pretože v QRPA a RQRPA metódach nedávajú vklad do RPA matíc. Spomenutá aproximácia však nie je správna v prípade metódy idúcej za rámec uvedených QRPA priblížení. V schématických výpočtoch [Š<sup>+</sup>00] sa ukázalo, že ako presné tak aj EPP-QRPA výsledky pre jednoduché  $\beta$ -prechody

narušujú zachovanie Ikedovho sumačného pravidla. Predpokladanou príčinou je práve zanedbanie spomenutých rozptylových operátorov. Naším cieľom je vývoj a realizácia presných a QRPA výpočtov idúcich za rámec RQRPA priblíženia s úplným modelovým hamiltoniánom so schématickou interakciou (t.j. bez zanedbania diskutovaných operátorov). Tento postup umožňuje hodnotiť dôležitosť jednotlivých členov použitého hamiltoniánu. Z QRPA modifikácií okrem iných uvažujeme nedávno publikovanú *Plne renormalizovanú QRPA* metódu (FR-QRPA). Je významná tým, že dokáže univerzálne zabezpečiť platnosť Ikedovho sumačného pravidla bez ohľadu na prítomnosť rozptylových členov v jadrovom hamiltoniáne a počítaný typ  $\beta$ -prechodov. Princíp FR-QRPA, publikovaný v [RF02], je v predloženej práci prvýkrát použitý na opis štruktúry jadra.

Výpočet maticových elementov  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu mnohonukleónového systému  $(A, Z)$  je obyčajne spojený s konštrukciou úplnej sústavy stavov prechodového jadra  $(A, Z + 1)$ , ktoré sú generované v rámci QRPA metódy alebo vrstvomého modelu. Opisu sústavy vzbudených stavov sa môžeme vyhnúť použitím integrálnej reprezentácie zodpovedajúcich mnohonukleónových Greenových funkcií [pozri kapitolu 2.1.2]. Tento neštandardný prístup z hľadiska súčasných postupov je navrhnutý a rozpracovaný v štvrtom projekte. Výpočet  $2\nu\beta\beta$ -prechodov v integrálnej reprezentácii viedol k zaujímavému a dôležitému zisteniu. Umožnil extrahovať nefyzikálnu časť príslušného jadrového maticového elementu, ktorá je dominantná pre malé hodnoty sily  $g^{pp}$ . Fyzikálny príspevok do  $2\nu\beta\beta$  maticového elementu vykazuje úplne odlišné správanie v závislosti od  $g^{pp}$  ako dosiaľ známe hodnoty počítané v rámci QRPA metód.

Ambíciou posledného - piateho projektu je prispieť k zlepšeniu súčasných realistických výpočtov maticových elementov  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu a teda aj polčasu premeny tohto zriedkavého jadrového procesu. Problémom najnovších používaných metód (RQRPA, „self-konzistentná“ RQRPA [BKZ00; D<sup>+</sup>00]) stále zostáva veľká citlivosť  $2\nu\beta\beta$  maticových elementov na zmenu parametra  $g^{pp}$ , úzko súvisiaca s nedostatočným približným zabezpečením Pauliho vylučovacieho princípu. Nezanedbateľným je tiež nesplnené Ikedovo sumačné pravidlo pre jednoduché beta-prechody v oboch vyššie spomenutých metódach. V článku [Š<sup>+</sup>00] bola v jednovrstvom Lipkinovom modeli navrhnutá nová QRPA modifikácia s perturbatívnym splnením Pauliho vylučovacieho princípu (PP-QRPA). Náplňou piateho projektu je realizácia PP-QRPA výpočtov s použitím realistického mnohovrstvomého hamiltoniánu [CSF95]. Prednosťou danej metódy v porovnaní so štandardným a renormalizovaným QRPA priblížením je presnejší výpočet QRPA maticových elementov, kde sa využíva perturbatívny prístup a fermiónová reprezentácia jadrového hamiltoniánu. Ukázalo sa, že aj v realistickom prípade je výsledkom presnejšieho včlenenia Pauliho princípu do QRPA väčšia stabilita získaných  $2\nu\beta\beta$  maticových elementov pri zmene sily  $g^{pp}$  a tiež posunutie kolapsu riešenia do nefyzikálnej oblasti hodnôt  $g^{pp}$ . PP-QRPA metóda tak môže nahradiť jestvujúce jadrové modely v realistických výpočtoch jednoduchých a dvojitých beta-prechodov.

Predkladaná dizertačná práca je rozdelená do piatich kapitol. Po úvode nasleduje kapitola so súčasným stavom v problematike výskumu dvojitej beta-premeny



jadier. Najskôr je v nej načrtnuté experimentálne štúdium  $\beta\beta$ -rozpadu a podrobne odvodená amplitúda jeho dvojneutrínového módu. Potom sú uvedené rôzne mnohonukleónové metódy a techniky na výpočet jadrových maticových elementov pre  $2\nu\beta\beta$ -prechod ako aj ich najnovší vývoj v rámci schématických modelov.

V tretej kapitole sú formulované ciele dizertačnej práce. Štvrtá kapitola je venovaná dosiahnutým výsledkom. Postupne sú v nej rozpísané princípy a formalizmy novovytvorených jadrových modelov a metód na výpočet maticových elementov  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu, ich numerické aplikácie a tiež diskusie dosiahnutých výsledkov vo všetkých piatich riešených projektoch. Získané výsledky sú zhrnuté a zhodnotené v záverečnej piatej kapitole. Dizertačná práca má tri dodatky. Úlohou prvých dvoch je podrobnejšia charakteristika BCS modelu [RS80] a Marumoriho bozónového mapovania [SS97], ktoré sú v riešených projektoch často používané. Posledný dodatok rezervujeme na výpis odvodených vzorcov (maticových elementov a ostatných dôležitých veličín) v jednotlivých metódach. Na záver je uvedený zoznam použitej literatúry a publikované práce.

---

*Predkladanú dizertačnú prácu som vytvoril postupne počas doktorandského štúdia na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave v rokoch 1999–2003.*

*Na tomto mieste chcem poďakovať môjmu školiteľovi RNDr. Fedorovi Šimkovicovi, PhD. za všestrannú pomoc, tvorivú diskusiu a užitočné pripomienky pri formovaní dizertačnej práce.*

*Vďaka patrí Dr. Vadimovi Bednyakovovi, ktorý bol garantom mojich študijných pobytov v Laboratóriu jadrových problémov v SÚJV Dubna, kde som vytvoril značnú časť výsledkov predkladanej práce.*

*Ďakujem tiež Dr. Ivanovi Šteklovi z FJFI ČVUT v Prahe a Prof. Dr. Aman-dovi Fässlerovi z Univerzity v Tübingene za možnosť pracovať na projektoch dizertačnej práce v ich vedeckých inštitúciách.*

*Mojej manželke Olge som vďačný za jej trpezlivosť a podporu pri písaní dizertačnej práce.*

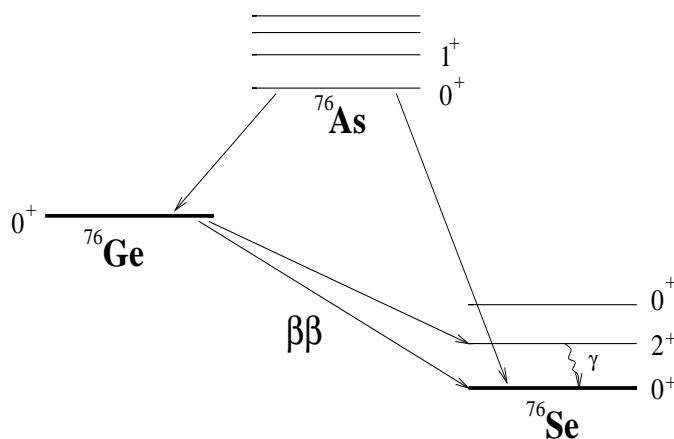
# Kapitola 2

## Súčasný stav problematiky

### 2.1 Dvojitý beta-rozpad jadra

Dvojitý  $\beta$ -rozpad je v súčasnosti najzriedkavejším jadrovým procesom, ktorý bol v prírode pozorovaný. Jeho skúmanie má veľký dosah na mnohé oblasti jadrovej fyziky, fyziky častíc a astrofyziky. Možnosť takejto premeny zabezpečuje párovacia sila medzi nukleónmi jadra. Tá spôsobuje, že páрно-párny systém s párnym počtom protónov a neutrónov, má väčšiu väzbovú energiu ako susedný nepárno-nepárny systém. Preto je jednoduchý beta-prechod a elektrónový záchyt energeticky zakázaný a jediným možným rozpadovým kanálom je  $\beta\beta$ -premena. V súčasnosti poznáme viac ako 60 páрно-párnych jadier, ktoré spĺňajú podmienku pre  $\beta\beta$ -rozpad [TZ02]. Typický príklad dvojitej  $\beta$ -premeny je znázornený na obrázku 2.1. Rozlišujeme dvojneutrínový a bezneutrínový mód  $\beta\beta$ -rozpadu. V prvom prípade

Obrázok 2.1: Charakteristická schéma  $\beta\beta$  rozpadu  $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$ .



sú dva emitované elektróny sprevádzané ich príslušnými antineutrínami

$$(A, Z) \longrightarrow (A, Z + 2) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e, \quad (2.1)$$

v druhom procese rozpadajúce sa jadro emituje len elektróny

$$(A, Z) \longrightarrow (A, Z + 2) + 2e^{-}. \quad (2.2)$$

Ako bolo naznačené v úvodnej kapitole, dvojneutrínový mód  $\beta\beta$ -premeny (2.1) je dovolený v ŠM a bol pozorovaný na viacerých jadrách s polčasmi rozpadu pohybujúcimi sa v rozmedzí od  $10^{19}$  do  $10^{24}$  rokov (viď tabuľku 2.1). Prvýkrát bol predpovedaný Mariou Goeppert-Mayer v roku 1935 [GM35]. Z teoretického hľadiska amplitúda  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu neobsahuje neznáme parametre fyziky elementárnych častíc a dá sa vyjadriť ako súčin fázového faktoru a príslušného jadrového maticového elementu pre tento prechod. Konštrukcia  $2\nu\beta\beta$  maticového elementu si vyžaduje znalosť úplnej sady vzbudených stavov prechodového jadra (ako je napríklad  $^{76}\text{As}$  v obrázku 2.1). Zmeraný polčas rozpadu priamo určuje hodnotu jadrového maticového elementu, ktorú môžeme konfrontovať s teoretickou predpoveďou vypočítanou v rámci daného jadrovo-štruktúrneho modelu.  $2\nu\beta\beta$ -rozpad z tohto hľadiska predstavuje citlivý test správnosti opisu jadrovej štruktúry.

Bezneutrínový mód (2.2) dvojitého beta-rozpadu navrhol v roku 1939 Furry [Fur39]. Pretože v ňom nie sú emitované elektrónové neutrína, narušuje tento proces zachovanie leptónového náboja o dve jednotky. Jeho možná existencia by teda ukazovala na novú fyziku za ŠM. V súčasnosti sú známe dolné ohraničenia na polčasy  $0\nu\beta\beta$ -rozpadov v prípade viacerých izotopov (viď tabuľku 2.1) a tiež prvá experimentálna evidencia  $0\nu\beta\beta$ -premeny [KK<sup>+</sup>02], ktorá je však predmetom diskusií. Na základe známych hodnôt alebo ohraničení na polčasy  $0\nu\beta\beta$ -rozpadu a príslušných jadrových maticových elementov sa dajú získať limity pre rôzne parametre reprezentujúce nezachovanie leptónového čísla. Presnosť vymedzenia možných hodnôt týchto parametrov je daná hlavne správnym výpočtom jadrových maticových elementov a tak závislá od spoľahlivosti jadrového modelu použitého na ich výpočet.

### 2.1.1 Experimentálne skúmanie $\beta\beta$ -rozpadu jadier

Experimentálne hodnoty (alebo ohraničenia) polčasov  $2\nu\beta\beta$  a  $0\nu\beta\beta$ -rozpadov pre niekoľko vybraných  $\beta\beta$  nestabilných jadier sú uvedené v tabuľke 2.1. Všetky izotopy, u ktorých predstavuje  $\beta\beta$ -premena dominantný rozpadový kanál, sú párnopárne. Párovacia sila vedie k základnému stavu jadra  $J^{\pi} = 0^{+}$ . Najviac preferované pre experimentálne štúdium sú  $\beta\beta$ -prechody zo základného stavu  $0_{g.s.}^{+}$  pôvodného jadra do základného stavu  $0_{g.s.}^{+}$  výsledného jadrového systému, pretože tieto sú oproti prechodom do vzbudených výsledných stavov zvýhodnené väčším fázovým faktorom. V poslednom čase sa však venuje zvýšená pozornosť aj možným prechodom do  $2^{+}$  a  $0^{+}$  excitovaných stavov konečného jadra [GV92; RS96; Š<sup>+</sup>01; SC94] (obrázok 2.1). Experimenty skúmajúce  $\beta\beta$ -premenu jadier môžeme rozdeliť do troch skupín: *priame, geochemické a rádiochemické* experimenty.

*Priame experimenty* sú založené na detekcii elektrónových párov emitovaných súčasne z rovnakého miesta vzorky pôvodného izotopu. Meranie sumárnych energií, prípadne uhlových korelácií vyletujúcich elektrónov umožňuje, na rozdiel od

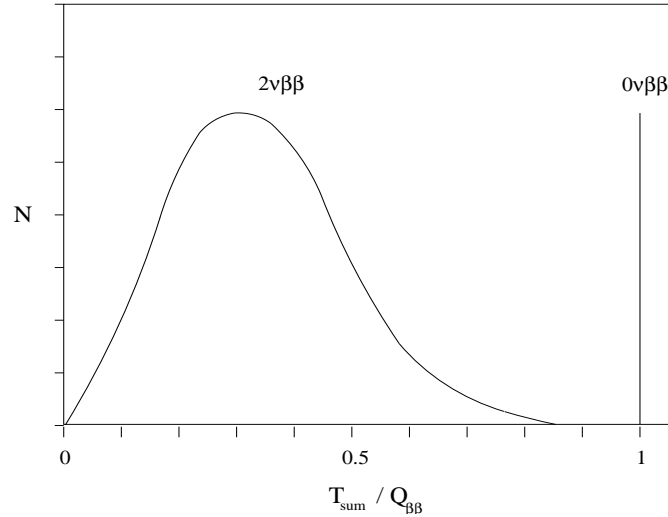
Tabuľka 2.1: Experimentálne hodnoty polčasov  $2\nu\beta\beta$  a  $0\nu\beta\beta$ -rozpadov pre niekoľko vybraných jadrových systémov. gch. (rch.) sú geochemické (rádiochemické) údaje. Percentuálne hodnoty označujú úroveň hodnovernosti. Dáta sú prebrané z tabuliek [TZ02]. Niektoré polčasy sú doplnené z označených referencií.

Jadrový $\beta\beta$ -prechod	$T_{1/2}^{2\nu\beta\beta}(0_{g.s.}^+ \rightarrow 0_{g.s.}^+)$ [roky]	$T_{1/2}^{0\nu\beta\beta}(0_{g.s.}^+ \rightarrow 0_{g.s.}^+)$ [roky]
$^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$	$4.2_{-1.3}^{+3.3} 10^{19}$ $(4.3_{-1.8}^{+2.8}) 10^{19}$	$> 1.5 10^{21}$ 90% $> 9.5 10^{21}$ 76%
$^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$	$(1.1_{-0.3}^{+0.6}) 10^{21}$ $(8.4_{-0.8}^{+1.0}) 10^{20}$	$(0.8 - 18.3) 10^{25}$ 95% <sup>a</sup> $> 1.9 10^{25}$ 90% <sup>b</sup>
$^{82}\text{Se} \rightarrow ^{82}\text{Kr}$	$(8.3 \pm 1.2) 10^{19}$ $(1.1_{-0.1}^{+0.3}) 10^{20}$ 68% $(1.2 \pm 0.1) 10^{20}$ gch.	$> 2.7 10^{22}$ 68% $> 9.5 10^{21}$ 90% <sup>c</sup>
$^{96}\text{Zr} \rightarrow ^{96}\text{Mo}$	$(3.9 \pm 0.9) 10^{19}$ 68% gch. $(2.1_{-0.4}^{+0.8}) 10^{19}$	$> 1.0 10^{21}$ 90%
$^{100}\text{Mo} \rightarrow ^{100}\text{Ru}$	$(9.5 \pm 1.0) 10^{18}$ $(1.2_{-0.3}^{+0.5}) 10^{19}$ 90% $(6.8_{-0.9}^{+0.8}) 10^{18}$ $(7.6_{-1.4}^{+2.2}) 10^{18}$	$> 5.5 10^{22}$ 90% $> 4.2 10^{22}$ 90% $> 4.9 10^{21}$ 90% $> 0.5 10^{21}$ 90% <sup>c</sup>
$^{116}\text{Cd} \rightarrow ^{116}\text{Sn}$	$(3.8 \pm 0.4) 10^{19}$ $(2.6_{-0.4}^{+0.7}) 10^{19}$ $(2.6_{-0.5}^{+0.9}) 10^{19}$	$> 5.0 10^{21}$ 90% <sup>c</sup> $> 7.0 10^{22}$ 90%
$^{128}\text{Te} \rightarrow ^{128}\text{Xe}$	$(7.2 \pm 0.3) 10^{24}$ gch. $(2.2 \pm 0.3) 10^{24}$ gch.	$> 5.0 10^{24}$ gch. $> 8.6 10^{22}$ 90%
$^{130}\text{Te} \rightarrow ^{130}\text{Xe}$	$(2.7 \pm 0.1) 10^{21}$ 68% gch. $(7.9 \pm 1.0) 10^{20}$ gch.	$> 1.4 10^{23}$ 90%
$^{136}\text{Xe} \rightarrow ^{136}\text{Ba}$	$> 8.1 10^{20}$ 90%	$> 4.4 10^{23}$ 90% $> 2.6 10^{23}$ 90%
$^{150}\text{Nd} \rightarrow ^{150}\text{Sm}$	$(6.8 \pm 0.8) 10^{18}$ $(1.9_{-0.4}^{+0.7}) 10^{19}$	$> 1.2 10^{21}$ 90%
$^{238}\text{U} \rightarrow ^{238}\text{Pu}$	$(2.0 \pm 0.6) 10^{21}$ 68% rch.	$> 2.0 10^{21}$ 68% rch.
$^{244}\text{Pu} \rightarrow ^{244}\text{Cm}$	$> 1.1 10^{18}$ 95% <sup>d</sup> rch.	$> 1.1 10^{18}$ 95% <sup>d</sup> rch.

<sup>a</sup>[KK<sup>+</sup>02], <sup>b</sup>[KK<sup>+</sup>01], <sup>c</sup>[Sar99], <sup>d</sup>[MLH92].

geochemických a rádiochemických metód, rozlíšiť jednotlivé módy  $\beta\beta$ -rozpadu. Pri  $2\nu\beta\beta$ -prechode je sumačné energetické spektrum elektrónov spojité, zatiaľ čo bezneutrínový mód je charakterizovaný píkom s polohou v maxime nožnej kinetickej energie  $Q_{\beta\beta}$  uvoľnenej v danej jadrovej premene (obrázok 2.2). Na základe detekcie sprievodného deexcitačného  $\gamma$ -kvanta vedú priame merania rozlíšiť  $0_{g.s.}^+ \rightarrow 0_{g.s.}^+$  prechod od rozpadov do  $2^+$  vzbuđených stavov výsledného jadra (ob-

Obrázok 2.2: Spektrá vyletujúcich elektrónov pri  $2\nu\beta\beta$  a  $0\nu\beta\beta$ -rozpade.  $T_{\text{sum}}$  je sumárna kinetická energia oboch emitovaných elektrónov a  $Q_{\beta\beta}$  je celková kinetická energia uvoľnená v  $\beta\beta$ -premene. Početnosť  $N$  sa uvádza v ľubovoľných jednotkách.



rázok 2.1). Atraktivnosť skúmania  $\beta\beta$ -rozpadu do vzbuđených stavov koncového jadra zvyšuje fakt, že selektivita merania na dva elektróny a  $\gamma$  kvantum významne znižuje veľkosť pozadia. Vzhľadom na to, že typické hodnoty  $T_{1/2}^{\beta\beta}$  sú veľké, priame experimenty sú veľmi citlivé na čistotu a veľkosť meraných vzoriek, na prírodné pozadie a na rádioaktívne znečistenie konštrukčných materiálov.

Pomocou detekcie elektrónových párov bola pozorovaná väčšina doteraz známych  $2\nu\beta\beta$ -premien jadier, napríklad rozpady  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{82}\text{Se}$ ,  $^{100}\text{Mo}$ ,  $^{116}\text{Cd}$ ,  $^{150}\text{Nd}$  (tabuľka 2.1). Skúmaním oblasti maximálnej kinetickej energie  $Q_{\beta\beta}$  v sumačnom energetickom spektre (obrázok 2.2) boli získané dolné limity na polčas  $0\nu\beta\beta$ -procesu v daných jadrách. V prípade  $^{76}\text{Ge}$  bola prvýkrát hodnota  $T_{1/2}^{0\nu\beta\beta}$  ohraničená aj zhora [KK<sup>+</sup>02].

V súčasnosti sa veľká pozornosť venuje meraniu  $\beta\beta$ -premeny jadra  $^{76}\text{Ge}$ . Polovodičový germániový detektor, ktorý má vynikajúce energetické rozlíšenie a teda je vhodný na štúdium  $0\nu\beta\beta$ -módu, je zároveň aj rádioaktívnym  $\beta\beta$  zdrojom. Spomedzi viacerých experimentov zaoberajúcich sa rozpadom  $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$  spomeňme Heidelberg–Moskovskú kolaboráciu [G<sup>+</sup>97]. Je to v súčasnosti najcitlivejší experiment na  $\beta\beta$ -rozpad  $^{76}\text{Ge}$ . Pozostáva z piatich germániových detektorov s celkovou hmotnosťou 11.51kg a obohatením na 86%  $^{76}\text{Ge}$ , ktoré sú umiestnené v podzemnom laboratóriu v Gran Sasso. Pomocou opísanej detekčnej sústavy sa počas obdobia august 1990 – máj 2000 namerál prvý pozitívny signál pre bezneutrínový mód  $\beta\beta$ -premeny. Prislúchajúci polčas rozpadu má hodnotu  $(0.8 - 18.3) 10^{25}$  rokov, čo vedie na efektívnu hmotnosť neutrína  $\langle m_\nu \rangle = (0.11 - 0.56)\text{eV}$  [KK<sup>+</sup>02]. Tieto výsledky sú stále predmetom diskusií. Navrhnutý je projekt GENIUS [KK98],

ktorý plánuje použitie obohateného  $^{76}\text{Ge}$  s celkovou hmotnosťou 100kg, neskôr až 1 tona. Tento experiment by mal potvrdiť existenciu  $0\nu\beta\beta$ -rozpadu  $^{76}\text{Ge}$ , spresniť hodnotu získaného polčasu premeny a zvýšiť jeho úroveň hodnovernosti [KK03].

Spomedzi priamych experimentov, ktoré študujú ďalšie  $\beta\beta$ -nestabilné jadrá spomeňme napríklad experiment TGV zameraný na skúmanie rozpadu  $^{48}\text{Ca}$ , projekty ELEGANT, v rámci ktorých sa meria  $\beta\beta$ -premena  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{100}\text{Mo}$ ,  $^{116}\text{Cd}$ , kolaboráciu NEMO, kde sa študujú  $\beta\beta$ -rozpady jadier  $^{76}\text{Zr}$ ,  $^{82}\text{Se}$ ,  $^{100}\text{Mo}$ ,  $^{116}\text{Cd}$ .

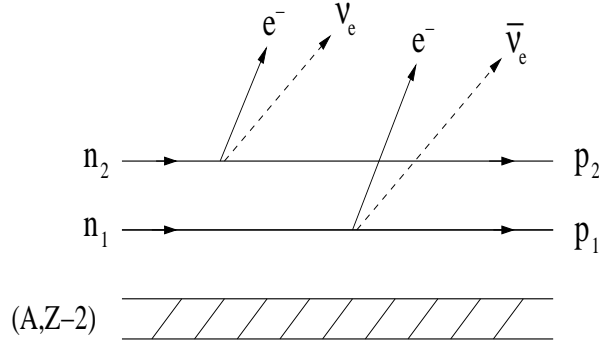
*Geochemické experimenty* merajú koncentráciu dcérskeho izotopu vo vzorke starej rudy, ktorá obsahuje pôvodný izotop. Využívajú to, že dcérskeho izotopu sa hromadí v rude dlhý čas ( $\sim 10^9$  rokov). Je však potrebné poznať históriu analyzovanej vzorky. Musí to byť uzavretý systém vzhľadom na výmenu ako pôvodného, tak aj vznikajúceho izotopu s okolitým prostredím. Pochopiteľne,  $\beta\beta$ -rozpad musí byť dominantným mechanizmom vzniku nového izotopu vo vzorke. Geochemickými metódami bola dokázaná existencia  $\beta\beta$ -rozpadu jadier  $^{82}\text{Se}$ ,  $^{96}\text{Zr}$ ,  $^{128}\text{Te}$  a  $^{130}\text{Te}$  (viď tabuľku 2.1).

*Rádiochemické merania* skúmajú akumuláciu dcérskeho izotopu vo vzorke pôvodného izotopu v laboratórnych podmienkach. Od geochemických metód sa odlišujú tým, že produkt  $\beta\beta$ -premeny sa vytvára počas známeho časového intervalu v striktno kontrolovanom prostredí. Keďže čas zhromažďovania vytvorených jadier je omnoho menší ako pri geochemických experimentoch, je podstatné, aby bola vzorka pred meraním očistená od dcérskeho jadier alebo nebola nimi kontaminovaná. Z tohto hľadiska sú na rádiochemické štúdie vhodné napríklad rozpady  $^{238}\text{U} \rightarrow ^{238}\text{Pu}$ ,  $^{232}\text{Th} \rightarrow ^{232}\text{U}$  a  $^{244}\text{Pu} \rightarrow ^{244}\text{Cm}$ , pretože vytvorené jadrá sú krátkožijúce ( $\sim 10^2$  rokov) a ich nahromadenie vo vzorke bude pred meraním malé. Navyše dcérske jadrá sú  $\alpha$ -rádioaktívne, čo umožňuje určiť relatívne malé množstvá vytvorených jadier.

Geochemické experimenty podobne ako rádiochemické metódy nie sú schopné rozpoznať jednotlivé módy  $\beta\beta$ -rozpadu. Keďže predpokladaná pravdepodobnosť realizácie  $0\nu\beta\beta$ -premeny je menšia ako v prípade dvojneutrónového módu, spájajú sa namerané polčasy rozpadov s  $2\nu\beta\beta$ -prechodom. Každopádne, maximálny počet zmeraných  $\beta\beta$  produktov poskytuje dolné ohraničenie na polčas rozpadu pre všetky módy  $\beta\beta$ -premeny.

### 2.1.2 Dvojneutrónový dvojité beta-rozpad a štruktúra jadra

V tejto časti odvodíme polčas rozpadu dvojneutrónového módu  $\beta\beta$ -rozpadu. Ide o proces dovolený v ŠM elektroslabých interakcií. Ako bude ukázané, pravdepodobnosť  $2\nu\beta\beta$ -prechodu môžeme faktorizovať na štvorec príslušného jadrového maticového elementu a fázový faktor daný integrálom cez fázový priestor vyletujúcich častíc. Predpokladá sa, že dvojnukleónový mechanizmus je dominantný pre danú jadrovú premenu [HS84] (viď obrázok 2.3).  $2\nu\beta\beta$ -rozpad je v tomto prípade procesom druhého rádu v rámci Fermiho teórie  $\beta$ -rozpadu. Hustota interakčného

Obrázok 2.3: Diagram pre dvojnukleónový mechanizmus  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu.

hamiltoniánu opisujúceho  $2\nu\beta\beta$ -premenu má tvar

$$\mathcal{H}_I = \mathcal{H}_S + \mathcal{H}_W^\beta, \quad (2.3)$$

kde  $\mathcal{H}_S$  je bližšie nešpecifikovaný člen charakterizujúci silné a elektromagnetické interakcie nukleónov v jadre a  $\mathcal{H}_W^\beta$  je hustota štandardného slabého efektívneho hamiltoniánu opisujúceho  $\beta$ -premenu.  $\mathcal{H}_W^\beta$  je daný vzťahom [BP87]

$$\mathcal{H}_W^\beta = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{e}(x)\gamma_\mu(1 + \gamma_5)\nu_e(x)j_\mu(x) + \text{h.c.}, \quad (2.4)$$

pričom  $G_F$  je Fermiho konštanta slabých interakcií,  $\bar{e}(x)$ ,  $\nu_e(x)$  sú elektrónové, resp. neutrínové operátory poľa a  $j_\mu(x)$  je hadrónový tok.

Nenulový vklad do amplitúdy  $2\nu\beta\beta$ -prechodu dá druhý člen v rozvoji operátora  $S$ -matice [ŠP99]:

$$\begin{aligned} \langle f|S^{(2)}|i\rangle &= \frac{(-i)^2}{2} \left(\frac{G_F}{\sqrt{2}}\right)^2 N_{p1}N_{k1}N_{p2}N_{k2}L_{\mu\nu}(p_1, k_1, p_2, k_2)J_{\mu\nu}(p_1, k_1, p_2, k_2) \\ &\quad - (p_1 \leftrightarrow p_2) - (k_1 \leftrightarrow k_2) + (p_1 \leftrightarrow p_2)(k_1 \leftrightarrow k_2), \end{aligned} \quad (2.5)$$

kde

$$L_{\mu\nu}(p_1, k_1, p_2, k_2) = \bar{u}(p_1)\gamma_\mu(1 + \gamma_5)u(-k_1)\bar{u}(p_2)\gamma_\nu(1 + \gamma_5)u(-k_2), \quad (2.6)$$

$$N_p = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2p_0}},$$

a

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu}(p_1, k_1, p_2, k_2) &= \\ &= \int e^{-i(p_1+k_1)x_1} e^{-i(p_2+k_2)x_2} \langle A'|T(j_\mu(x_1)j_\nu(x_2)e^{-i\int \mathcal{H}_S(x')dx'})|A\rangle dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

$|A\rangle$  a  $|A'\rangle$  sú vlnové funkcie pôvodného a výsledného jadra a  $p_1, p_2$  ( $k_1, k_2$ ) sú štvorhybnosti vyletujúcich elektrónov (antineutrín). Aby sme mohli oddeliť časové a priestorové závislosti v (2.7), je výhodné prejsť k Heisenbergovej reprezentácii operátorov a vlnových funkcií. Zavedieme unitárnu transformáciu [Bil71]

$$U(t, t_0) = e^{-i \int_{t_0}^t H_S(t) dt}, \quad H_S(t) = \int \mathcal{H}_s(x) d\vec{x}, \quad (2.8)$$

a následne definujeme vlnové funkcie  $|A\rangle_{in} = U^+(-\infty, 0)|A\rangle$ ,  $|A'\rangle_{out} = U^+(\infty, 0)|A'\rangle$ , a Heisenbergov obraz hadrónového toku  $J_\alpha(x) = U^+(x_0, 0)j_\alpha(x)U(x_0, 0)$ . Pre jadrový člen matice prechodu v rovnici (2.7) teraz môžeme písať

$$\langle A'|T \left( j_\mu(x_1)j_\nu(x_2)e^{-i \int \mathcal{H}_s(x') dx'} \right) |A\rangle = {}_{out}\langle A'|T (J_\mu(x_1)J_\nu(x_2)) |A\rangle_{in}. \quad (2.9)$$

Poznamenajme, že časový vývoj operátora  $J_\mu(x)$  je daný vzťahom

$$J_\mu(x) = e^{iHt} J_\mu(\vec{x}, 0) e^{-iHt}, \quad (2.10)$$

kde  $H$  je celkový jadrový hamiltonián.

Matica prechodu (2.5) obsahuje príspevok od dvoch neskorelovaných jednoduchých  $\beta$ -rozpadov a  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu. Aby sme separovali obidva procesy, vyjadríme  $T$ -súčin dvoch hadrónových tokov v (2.7), resp. v (2.9) nasledovne [ŠPF98b]:

$$T(J_\mu(x_1)J_\nu(x_2)) = J_\mu(x_1)J_\nu(x_2) + \Theta(x_{20} - x_{10})[J_\nu(x_2), J_\mu(x_1)]. \quad (2.11)$$

V práci [FŠ98; ŠP99] je ukázané, že prvý člen na pravej strane rovnice (2.11) je spojený s dvomi po sebe nasledujúcimi  $\beta$ -prechodmi, čo je pre väčšinu  $\beta\beta$ -rozpadajúcich sa jadier energeticky zakázané. Komutátor hadrónových tokov v (2.11) prislúcha  $2\nu\beta\beta$ -premene. Dôležitým poznatkom podrobne ukázaným v [ŠP99] je fakt, že pre  $2\nu\beta\beta$ -proces je rozhodujúca reziduálna interakcia v jadrovom hamiltoniáne. Ak celkový hamiltonián  $H = H^{s.p.} + H^{res}$  aproximujeme len jednočasticovým členom  $H^{s.p.}$ , potom je maticový element opisujúci  $2\nu\beta\beta$ -premenu nulový, lebo komutátor hadrónových tokov v (2.11) je rovný nule.

Pre ďalší postup budeme brať do úvahy nasledujúce štandardné aproximácie:

1. Dlhovlnné priblíženie. Veľkosti hybností častíc vyletujúcich z jadra sú rádovo niekoľko MeV, charakteristické dĺžky sú dané rozmerom jadra ( $\sim 1 fm$ ). Preto v (2.7) môžeme nahradiť  $e^{-i(\vec{p}_i + \vec{k}_i)\vec{x}_i} \sim 1$ .
2. Nerelativistické impulzné priblíženie pre jadrový tok  $J_\alpha(\vec{x}, 0)$

$$J_\alpha(\vec{x}) = \sum_{n=1}^A \tau_n^+ \{g_V \delta_{\alpha 4} + i g_A (\vec{\sigma}_n)_k \delta_{\alpha k}\} \delta(\vec{x} - \vec{x}_n), \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.12)$$

kde sumácia prebieha cez všetky nukleóny pôvodného jadra a  $g_A$  ( $g_V$ ) je axiálna (vektorová) konštanta.



3. Uvažujeme len jadrové prechody medzi základnými stavmi pôvodného a konečného jadra:  $0_{g.s.i}^+ \rightarrow 0_{g.s.f}^+$ .
4. Energie vyletujúcich častíc vystupujúce v menovateli amplitúdy  $2\nu\beta\beta$ -prechodu nahradíme ich strednou hodnotou:

$$p_{10} + k_{10} \approx p_{20} + k_{20} \approx \frac{E_i - E_f}{2} \equiv \Delta, \quad (2.13)$$

kde  $E_i$  ( $E_f$ ) je energia základného stavu pôvodného (výsledného) jadra. Touto aproximáciou sa zjednoduší integrál cez fázový priestor vyletujúcich častíc a výpočet amplitúdy sa faktorizuje na jadrovú a leptónovú časť.

Zahrnutím spomenutých priblížení dostaneme z (2.7), pre príspevok zodpovedajúci  $2\nu\beta\beta$ -prechodu, nasledovný výraz

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu}^{2\nu\beta\beta}(p_1, k_1, p_2, k_2) &= 2i(g_V^2 M_F^{2\nu} \delta_{\mu 4} \delta_{\nu 4} - g_A^2 M_{GT}^{2\nu} \delta_{\mu k} \delta_{\nu k}) \times \\ &\times 2\pi\delta(E_f - E_i + p_{10} + k_{10} + p_{20} + k_{20}), \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.14)$$

$M_F^{2\nu}$  a  $M_{GT}^{2\nu}$  sú Fermiho a Gamow-Tellerov maticové elementy v integrálnej reprezentácii:

$$M_F^{2\nu} = \langle 0_f^+ | \frac{i}{2} \int_0^\infty [A^F(t/2), A^F(-t/2)] dt | 0_i^+ \rangle, \quad (2.15)$$

$$M_{GT}^{2\nu} = \langle 0_f^+ | \frac{i}{2} \int_0^\infty [A_k^{GT}(t/2), A_k^{GT}(-t/2)] dt | 0_i^+ \rangle. \quad (2.16)$$

$A^F(t)$ ,  $A_k^{GT}(t)$  označujú príslušné  $\beta$ -prechodové operátory, ktorých závislosť na čase je daná vzťahmi:

$$A^F(t) = e^{iHt} A^F(0) e^{-iHt}, \quad A^F(0) = \sum_i \tau_i^+ \quad (2.17)$$

$$A_k^{GT}(t) = e^{iHt} A_k^{GT}(0) e^{-iHt}, \quad A_k^{GT}(0) = \sum_i \tau_i^+ (\sigma_i)_k \quad k = 1, 2, 3.$$

Predpokladáme, že vlnové funkcie jadriér sú vlastnými stavmi hamiltoniánu  $H$ . Po vložení úplnej sústavy stavov prechodového jadra  $|0_n^+\rangle$  ( $|1_n^+\rangle$ ) s energiami  $E_n$  medzi operátory vystupujúce v (2.15) ((2.16)) a následnou integráciou cez premennú  $t$  dostaneme:

$$M_F^{2\nu} = \sum_n \frac{\langle 0_f^+ | A^F(0) | 0_n^+ \rangle \langle 0_n^+ | A^F(0) | 0_i^+ \rangle}{E_n - E_i + \Delta}, \quad (2.18)$$

$$M_{GT}^{2\nu} = \sum_n \frac{\langle 0_f^+ | A_k^{GT}(0) | 1_n^+ \rangle \langle 1_n^+ | A_k^{GT}(0) | 0_i^+ \rangle}{E_n - E_i + \Delta}. \quad (2.19)$$

Pri integrácii sme použili metódu tzv. adiabatického vypnutia interakcie v nekonečne:

$$\int_0^\infty e^{iax} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{i(a-i\varepsilon)x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{i}{a-i\varepsilon}. \quad (2.20)$$

Výpočet  $M_F^{2\nu}$  a  $M_{GT}^{2\nu}$  vo forme (2.18) a (2.19) vyžaduje konštrukciu úplného spektra stavov  $|0_n^+\rangle$  a  $|1_n^+\rangle$  prechodového jadra v rámci vhodného jadrového modelu, napr. pomocou (QRPA) diagonalizácie príslušného jadrového hamiltoniánu. Amplitúdu  $2\nu\beta\beta$ -prechodu môžeme teraz vyjadriť nasledovne:

$$\begin{aligned} \langle f|S^{(2)}|i\rangle &= \langle f|R|i\rangle 2\pi\delta(p_{10} + k_{10} + p_{20} + k_{20} + E_f - E_i), \\ \langle f|R|i\rangle &= \frac{(-i)^2}{2} \left(\frac{G_F}{\sqrt{2}}\right)^2 2\bar{u}(p_1)(1-\gamma_5)u(-p_2)\bar{u}(k_2)(1+\gamma_5)u(-k_1) \\ &\quad \times N_{p_1}N_{p_2}N_{k_1}N_{k_2}(2i)(g_V^2 M_F^{2\nu} - g_A^2 M_{GT}^{2\nu}). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Pre pravdepodobnosť rozpadu jadra platí vzťah

$$dw = |\langle f|R|i\rangle|^2 2\pi\delta(p_{10} + k_{10} + p_{20} + k_{20} + E_f - E_i) d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 d\vec{k}_1 d\vec{k}_2. \quad (2.22)$$

Celkovú pravdepodobnosť  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu získame sumáciou štvorca amplitúdy  $\langle f|R|i\rangle$  cez všetky možné orientácie spinov vyletujúcich častíc. Tiež treba brať do úvahy deformáciu elektrónovej vlny v dôsledku coulombovskej interakcie elektrónu s dcérsym jadrom. Preto sa do amplitúdy zavádza Fermiho korekčný faktor, ktorý má v nerelativistickom priblížení tvar [PR59]

$$F_c(p, Z) = \frac{p_0}{p} \frac{2\pi\alpha Z}{(1 - e^{-2\pi\alpha Z})} = \frac{p_0}{p} F_c(Z), \quad (2.23)$$

kde  $\alpha$  je konštanta jemnej štruktúry,  $Z$  je protónové číslo. Integrovaním (2.22) dostávame pre celkovú pravdepodobnosť  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu rovnosť

$$W^{2\nu\beta\beta} = \frac{1}{2} \frac{(G_F g_A)^4}{\pi^7} F_c^2(Z+2) I(m_e, W_0) \left| \left(\frac{g_V}{g_A}\right)^2 M_F^{2\nu} - M_{GT}^{2\nu} \right|^2, \quad (2.24)$$

ktorá pozostáva z jadrovej časti (danej maticovými elementami  $M_F^{2\nu}$  a  $M_{GT}^{2\nu}$ ) a z integrálu cez fázový priestor častíc, z ktorého pochádza aj člen

$$I(m_e, W_0) = \int_{m_e}^{W_0} p_{10}^2 dp_{10} \int_{m_e}^{W_0-p_{10}} p_{20}^2 dp_{20} \int_0^{W_0-p_{10}-p_{20}} k_{10}^2 (W_0-p_{10}-p_{20}-k_{10})^2 dk_{10}, \quad (2.25)$$

s označením  $W_0 = E_i - E_f$ ,  $m_e$  je hmotnosť elektrónu. Nakoniec pre inverzný polčas  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu môžeme písať [HS84; DKT85]

$$[T_{1/2}^{2\nu}(0^+ \rightarrow 0^+)]^{-1} = \frac{W^{2\nu\beta\beta}}{\ln 2} = \frac{G^{2\nu}}{\ln 2} \left| \left(\frac{g_V}{g_A}\right)^2 M_F^{2\nu} - M_{GT}^{2\nu} \right|^2, \quad (2.26)$$

kde  $G^{2\nu}$  je fázový faktor vyplývajúci z (2.24). Zdôraznime, že  $G^{2\nu}$  neobsahuje neznáme parametre. Teoretická hodnota polčasu rozpadu  $T_{1/2}^{2\nu}$  je ovplyvnená presnosťou výpočtu jadrových maticových elementov  $M_F^{2\nu}$ ,  $M_{GT}^{2\nu}$ . Problém spoľahlivého

a presného určovania hodnôt  $T_{1/2}^{2\nu}$  sa tak redukuje hlavne na výber vhodného jadrového modelu, ktorý dokáže uspokojuivo opísať úplnú sústavu vzbudených stavov prechodového jadra.

Stojí za zmienku poznamenať, že je možné vyhnúť sa konštrukcii stavov prechodového jadra použitím integrálnej reprezentácie maticových elementov  $M_F^{2\nu}$ ,  $M_{GT}^{2\nu}$  (rovnice (2.15),(2.16)). K tomu je však potrebné analyticky určiť časovo závislé  $\beta$ -prechodové operátory (2.17), napr. s využitím ich rozvoja do nekonečného radu komutátorov:

$$e^{iHt}\hat{O}e^{-iHt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \overbrace{[H, [H, \dots, [H, \hat{O} \dots ]]}^{k\text{-krát}}, \quad \hat{O} = A_k^{GT}(0), A^F(0). \quad (2.27)$$

V kapitole 4.4 je ukázané, že je možné uskutočniť aj takýto netradičný výpočet  $2\nu\beta\beta$ -maticových elementov v rámci schématických modelov. S aproximatívnymi požiadavkami na jadrový hamiltonián využíva načrtnutý postup aj *Metóda expanzie prechodového operátora* [FŠ98] (pozri časť 2.2.4).

Z praktického hľadiska je pre  $2\nu\beta\beta$ -proces dôležitý hlavne Gamow-Tellerov element  $M_{GT}^{2\nu}$ . Fermiho element je potlačený, pretože príslušný operátor spája stavy z rovnakého izospinového multipletu, zatiaľ čo materské a dcérske jadrá pri  $2\nu\beta\beta$ -premene prislúchajú k rôznym multipletom. Z hľadiska štúdia a vývoja jadrových modelov na opis  $\beta\beta$ -prechodov je ale potrebné skúmať a analyzovať správanie sa oboch spomenutých maticových elementov.

Dôležitou skutočnosťou súvisiacou s teoretickými predpoveďami polčasov  $T_{1/2}^{2\nu}$   $2\nu\beta\beta$ -rozpadu je možnosť ich porovnania s experimentálnymi údajmi  $T_{1/2}^{2\nu-exp}$  dostupnými pre viacero jadrových systémov, čo zároveň umožňuje citlivý test použitého jadrového-štruktúrneho modelu pri výpočte  $T_{1/2}^{2\nu}$ .

Počítaním amplitúdy bezneutrínového módu  $\beta\beta$ -rozpadu v dvojnukleónovom mechanizme by sme tiež prišli k definíciám maticových elementov  $M_F^{0\nu}$  a  $M_{GT}^{0\nu}$ , v ktorých vystupujú vzbudené stavy a energie prechodového jadra. V tomto prípade sa však k energiám medzistavov pripočítava impulz virtuálneho Majoranovského neutrína, ktorého stredná hodnota je približne 50 – 100 MeV. V porovnaní s ňou môžeme excitačné energie prechodového jadra ( $\sim$  MeV) zanedbať a previesť sumáciu cez úplnú sústavu vzbudených stavov. Potom pre konštrukciu elementov  $M_F^{0\nu}$  a  $M_{GT}^{0\nu}$  stačí poznať len vlnové funkcie základných stavov pôvodného a výsledného jadra.

## 2.2 Jadrové modely

V predchádzajúcich úvahách bolo ukázané, že dôležitou súčasťou teoretického opisu  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu je výpočet štruktúry prechodového jadra ako aj vlnových funkcií pôvodného a výsledného mnohonukleónového systému. V súvislosti s určovaním jadrových maticových elementov  $2\nu\beta\beta$ -premeny bolo použitých už množstvo jadrového-štruktúrnych techník [SC98]. Podmienku pre  $\beta\beta$ -prechod totiž spĺňajú stredne ťažké a ťažké jadrá s otvorenou vrstvou a komplikovanou štruktúrou.

Výnimkou je vápnik - systém s  $A=48$ , ktorý je dvojitým magickým jadrom s uzavretými Fermiho hladinami.

### 2.2.1 Vrstvový model. Monte Carlo vrstvom model

Vrstvom model dokázal veľmi uspokojivo vysvetliť množstvo pozorovaných vlastností nízkych vzbudených stavov jadier. Jeho výhodou je, že poskytuje mikroskopické vlnové funkcie, ktoré sú charakterizované danou sadou kvantových čísel (parita, uhlový moment, izospin...) súvisiacich so symetriami jadrového hamiltoniánu. Vlnové funkcie jadra automaticky zahrňujú všetky nukleón–nukleónové korelácie v rámci uvažovaného modelového priestoru.

Výpočet maticových elementov  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu sa vo vrstvom modeli deje na základe exaktnej diagonalizácie modelového hamiltoniánu v definovanom konfiguračnom priestore stavov. Pre stredne ťažké a ťažké jadrá sa však priestor stavov medzijadra pri  $\beta\beta$ -premene zväčšuje tak drasticky, že spoľahlivé výpočty sa stávajú nemožnými za  $pf$ -vrstvou. Ukázalo sa, že aj v ľahších jadrách obsahujúcich maximálne  $pf$ -vrstvu musia byť štúdie  $2\nu\beta\beta$ -prechodov založené na aproximujúcich predpokladoch [ZBR90], pretože ani relatívne veľký modelový priestor vrstvom modelu nedokáže spoľahlivo popísať stavy v oblasti gigantickej Gamow–Tellerovej rezonancie, ktoré sú dôležité pre  $\beta$ -premenu. Vrstvom model má problém aj s úplnosťou vzbudených stavov medzijadra, lebo energetický interval, ktorý pokrýva, je pre stredne ťažké a ťažké jadrá s otvorenou vrstvou malý. V prípade  $0\nu\beta\beta$ -rozpadu,  $^{48}\text{Ca}$  je pravdepodobne jediné jadro, pre ktoré môže byť použitý pôvodný vrstvom model s uspokojivým výsledkom [P<sup>+</sup>95]. Ak prejdeme k ťažším jadrám, počet generovaných základných stavov astronomicky narastá a realistické výpočty nie je možné uskutočniť bez výrazných obmedzení.

V súčasnosti existuje niekoľko postupov, ktoré dovoľujú počítať v rámci vrstvom modelu  $\beta\beta$ -prechody aj pre niektoré ťažšie jadrá, ako napríklad  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{82}\text{Se}$ ,  $^{136}\text{Xe}$  [CNPR96], kde treba uvažovať valenčné orbitály z  $sdg$  vrstvy. Tieto postupy sú takisto založené na obmedzeniach, ktoré znižujú počet možných jadrových konfigurácií. Nezanedbateľné však je, že možnosť uskutočnenia výpočtov s väčšími modelovými priestormi sa stáva reálnejšou v súvislosti s rýchlym vývojom čím ďalej výkonnejších počítačov. V tabuľke 2.2 sú uvedené jadrové maticové elementy  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu  $^{48}\text{Ca}$  a  $^{76}\text{Ge}$  získané pomocou výpočtov vo vrstvom modeli. Porovnanie s hodnotami extrahovanými z experimentu ukazuje rádovú zhodu výsledkov.

Rozšíriť oblasť aplikácie vrstvom modelu na ťažšie jadrá sa snaží *vrstvom model Monte Carlo* (SMMC)[L<sup>+</sup>95]. Táto metóda využíva fakt, že veľká časť z celkového obrovského počtu konfigurácií stavov v jadre nie je dôležitá pre opis základných vlastností jadra. Na relevantný opis je potrebná len určitá podmnožina celého priestoru stavov. Daný predpoklad umožňuje uvažovať štruktúru ťažších jadier s  $sdg - pf$  vrstvami v prijateľne veľkom modelovom priestore. Pre najľahšie  $\beta\beta$  nestabilné jadrá sú  $2\nu\beta\beta$  maticové elementy vypočítané v rámci SMMC v dobrej zhode s hodnotami získanými pomocou pôvodného vrstvom modelu

Tabuľka 2.2: Hodnoty Gamow–Tellerových  $2\nu\beta\beta$  jadrových maticových elementov ( $M_{GT}^{2\nu}$ ) získané výpočtom vo vrstvovom modeli (SM), vo vrstvovom modeli Monte Carlo (SMMC) a extrahované z experimentu (Exp).

jadro	$M_{GT}^{2\nu}$ [MeV <sup>-1</sup> ]:	SM	SMMC	Exp
<sup>48</sup> Ca		0.08 <sup>a</sup>	0.15 ± 0.07 <sup>a</sup>	0.046 <sup>b</sup>
<sup>76</sup> Ge		0.18 <sup>c</sup>	0.12 ± 0.05 <sup>a</sup>	0.140 <sup>a</sup>

<sup>a</sup>[R<sup>+</sup>96], <sup>b</sup>[SC98], <sup>c</sup>[CNPR96].

(pozri tabuľku 2.2). SMMC preto predstavuje sľubnú alternatívu konvenčných výpočtov vo vrstvovom modeli pre oblasť ťažších  $\beta\beta$ -nestabilných jadier.

### 2.2.2 QRPA a jej modifikácie

QRPA [RS80] je jedna z najznámejších metód zaoberajúca sa opisom jadrovej štruktúry pri  $\beta\beta$ -rozpade stredne ťažkých a ťažkých jadier. Výhodou QRPA výpočtov oproti vrstvovému modelu je, že môžu pokryť značný energetický interval vzbudených stavov. Riešením QRPA rovníc sa získa úplná sústava vzbudených stavov prechodového jadra, ktorá je potrebná pre konštrukciu  $2\nu\beta\beta$ -maticových elementov ( $M_F$ ,  $M_{GT}$ ).

Formalizmus QRPA pozostáva z dvoch hlavných krokov: (i) Bogolyubova transformácia medzi časticovými a kvázičasticovými operátormi (vzťah (4.79)), pomocou ktorej sa rozmaže Fermiho úroveň jadra cez relatívne veľký počet stavov, (ii) rovnica pohybu v kvázičasticovej reprezentácii, ktorá určí vzbudené stavy. Samotným QRPA výpočtom predchádza riešenie BCS rovnice (viď dodatok A), pomocou ktorej sa určia  $v_\tau$ ,  $u_\tau$  elementy (uvedené v dodatku A) Bogolyubovej transformácie (4.79).  $M$ -tý excitovaný stav prechodového jadra s uhlovým momentom  $J$  a jeho projekciou  $M$  je v QRPA vytvorený pomocou fonónového operátora  $Q_{JM}^{m\dagger}$  [FS98]:

$$Q_{JM}^{m\dagger}|0_{RPA}^+\rangle = |m, JM\rangle, \quad Q_{JM}^m|0_{RPA}^+\rangle = 0, \quad (2.28)$$

kde  $|0_{RPA}^+\rangle$  je základný stav pôvodného alebo výsledného jadra definovaný ako vákuum pre operátor  $Q_{JM}^m$ . Náboj meniaci fonónový operátor

$$Q_{JM}^{m\dagger} = \sum_{pn} \{X_{pn}^m A^\dagger(pn; JM) - Y_{pn}^m \tilde{A}(pn; JM)\}, \quad (2.29)$$

obsahuje voľné variačné amplitúdy  $X_{pn}^m$ ,  $Y_{pn}^m$  a kreačné a anihilačné operátory páru protón-neutrónových kvázičastíc viazaných do uhlového momentu  $J$  s projekciou  $M$  (preto sa prezentovaná metóda označuje aj ako protón–neutrónová QRPA (pn–

QRPA)):

$$A^\dagger(pn; JM) = [\alpha_p^\dagger \alpha_n^\dagger]^{JM} = \sum_{m_p, m_n} C_{j_p m_p j_n m_n}^{JM} \alpha_{p m_p}^\dagger \alpha_{n m_n}^\dagger, \quad (2.30)$$

$$\tilde{A}(pn; JM) = -\widetilde{[\alpha_p \alpha_n]}^{JM} = (-1)^{J-M} \sum_{m_p, m_n} C_{j_p m_p j_n m_n}^{J-M} \alpha_{n m_n} \alpha_{p m_p}.$$

$\alpha_{\tau m_\tau}^\dagger$  ( $\alpha_{\tau m_\tau}$ ) je kreačný (anihilačný) operátor kvázičastice s kvantovými číslami  $\tau \equiv (n_\tau, l_\tau, j_\tau)$ . Pre časovo reverzný operátor platí konvencia  $\tilde{\alpha}_{\tau m_\tau}^\dagger = (-1)^{j_\tau - m_\tau} \alpha_{\tau - m_\tau}^\dagger$ .

QRPA rovnice možno odvodiť s využitím vzťahov (2.28) a (2.29) nasledujúcim postupom [RS80; Row68]:

1. predpokladáme, že  $|0_{RPA}^+\rangle$ ,  $|m; JM\rangle$  sú vlastné stavy jadrového hamiltoniánu  $H$ :

$$H|m; JM\rangle = E_m|m; JM\rangle, \quad H|0_{RPA}^+\rangle = E_0|0_{RPA}^+\rangle,$$

2. odčítaním uvedených rovníc a použitím označenia  $\Omega_m = E_m - E_0$  máme:

$$[H, Q_{JM}^{m\dagger}]|0_{RPA}^+\rangle = \Omega_m Q_{JM}^{m\dagger}|0_{RPA}^+\rangle,$$

3. vynásobením poslednej rovnice variačným stavom  $\langle 0_{RPA}^+ | \delta Q_{JM}^m$  a využitím QRPA podmienky (2.28) dostaneme:

$$\langle 0_{RPA}^+ | [\delta Q_{JM}^m, H, Q_{JM}^{m\dagger}] | 0_{RPA}^+ \rangle = \Omega_m \langle 0_{RPA}^+ | [\delta Q_{JM}^m, Q_{JM}^{m\dagger}] | 0_{RPA}^+ \rangle,$$

(dvojitý komutátor použitý v zápise ľavej strany rovnosti má tvar  $[A, B, C] = \frac{1}{2}[A, [B, C]] + \frac{1}{2}[[A, B], C]$ ),

4. dosadením vyjadrenia (2.29) pre fonónový operátor do predchádzajúcej rovnosti a uvažovaním variácie amplitúd  $X_{pn}^m$ ,  $Y_{pn}^m$ , získame QRPA rovnice:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^m \\ Y^m \end{pmatrix} = \Omega_m \begin{pmatrix} \mathcal{U} & 0 \\ 0 & -\mathcal{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^m \\ Y^m \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

kde elementy QRPA matíc  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{U}$  sú definované nasledovne:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(pn p' n' J) &= \langle 0_{RPA}^+ | [A(pn; JM), H, A^\dagger(p' n'; JM)] | 0_{RPA}^+ \rangle, \\ \mathcal{B}(pn p' n' J) &= -\langle 0_{RPA}^+ | [A(pn; JM), H, \tilde{A}(p' n'; JM)] | 0_{RPA}^+ \rangle, \\ \mathcal{U}(pn p' n' J) &= \langle 0_{RPA}^+ | [A(pn; JM), A^\dagger(p' n'; JM)] | 0_{RPA}^+ \rangle. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Riešením rovníc (2.31) sa získajú excitačné energie  $\Omega_m$  a variačné amplitúdy  $X_{pn}^m$ ,  $Y_{pn}^m$ , na základe ktorých vieme skonštruovať vlnovú funkciu m-tého vzбудeného stavu jadra.

V rámci realistických výpočtov sa pri počítaní matíc (2.32) nezaobídeme bez priblížení, podľa ktorých rozlišujeme rôzne modifikácie QRPA metódy. **Štandardná QRPA metóda** používa tzv. *kvázibozónovú aproximáciu* (QBA). Jej podstata spočíva v tom, že komutátor dvoch bifermiónových operátorov  $[A(pn; JM), A^\dagger(p'n'; JM)]$  sa nahrádza jeho strednou hodnotou v BCS vákuu [RS80]:

$$[A(pn; JM), A^\dagger(p'n'; JM)] \approx \langle BCS|[A(pn; JM), A^\dagger(p'n'; JM)]|BCS\rangle = \delta_{pp'}\delta_{nn'}. \quad (2.33)$$

To má za následok, že operátory  $A$ ,  $A^\dagger$  sa správajú ako bozónové, čím je narušená platnosť Pauliho vylučovacieho princípu. Tento nedostatok čiastočne odstraňuje **renormalizovaná QRPA**, keď sa zamení neskorelované  $|BCS\rangle$  vákuum za skorelované  $|0_{RPA}^+\rangle$  vákuum (renormalizovaná QBA - RQBA) [TS95; SŠF96]:

$$[A(pn; JM), A^\dagger(p'n'; JM)] \approx \langle 0_{RPA}^+|[A(pn; JM), A^\dagger(p'n'; JM)]|0_{RPA}^+\rangle = \delta_{pp'}\delta_{nn'}D_{pnJ}. \quad (2.34)$$

Renormalizačný faktor  $D_{pnJ}$  má (na základe definícií (2.30)) vyjadrenie

$$D_{pnJ} = 1 - \hat{j}_p^{-1} \langle 0_{RPA}^+ | [\alpha_p^\dagger \tilde{\alpha}_p]^{00} | 0_{RPA}^+ \rangle - \hat{j}_n^{-1} \langle 0_{RPA}^+ | [\alpha_n^\dagger \tilde{\alpha}_n]^{00} | 0_{RPA}^+ \rangle, \quad (2.35)$$

kde  $\hat{j} \equiv \sqrt{2j+1}$ . Hodnota  $D_{pnJ}$  je menšia ako 1 ( $D_{pnJ} = 1$  zodpovedá QBA). Kvázichasticové hustoty na pravej strane rovnice (2.35) sa dajú prepísať cez súčin bifermiónových operátorov  $A^\dagger(pn; JM)$ ,  $A(pn; JM)$  [CDDS94], čo pri opätovnom dosadení do (2.35) a využití QRPA podmienky (2.28) vedie na vzťah

$$D_{pnJ} = 1 - \frac{1}{\hat{j}_p^2} \sum_{n_1 J m} \hat{j}^2 D_{pn_1 J}^2 |Y_{pn_1}^m|^2 - \frac{1}{\hat{j}_n^2} \sum_{p_1 J m} \hat{j}^2 D_{p_1 n J}^2 |Y_{p_1 n}^m|^2. \quad (2.36)$$

Koeficienty  $D_{pnJ}$  tak spätne závisia od amplitúd  $Y_{pn}^m$  – riešenia RQRPA. Pretože vo výpočte komutátora (2.34) sa uvažuje fermiónová štruktúra operátorov  $A$ ,  $A^\dagger$  ( $D_{pnJ} < 1$ ), RQRPA približným spôsobom splňa Pauliho vylučovací princíp. Aby sme získali vlnové funkcie a energie vzbudených stavov v rámci RQRPA, je potrebné simultánne riešiť systém nelineárnych rovníc (2.36) a QRPA rovníc (2.31). Iteračné určenie renormalizačných faktorov  $D_{pnJ}$  pomocou (2.36) sa nezaobíde bez znalosti RQRPA riešení pre všetky uvažované multipolarity  $J$ . Tie získame z rovníc (2.31), ak poznáme hodnoty  $D_{pnJ}$ . Ide teda o dvojité iteratívne riešenie, čo kladie značné nároky na výkon použitej výpočtovej techniky.

Poznamenajme, že výpočet QRPA matíc (2.32) v rámci QBA a RQBA nevyžaduje znalosť explicitného vyjadrenia vlnovej funkcie  $|0_{RPA}^+\rangle$ . Základný stav  $|0_{RPA}^+\rangle$  je jednoznačne určený QRPA podmienkou (2.28). V realistickom prípade sa dá nájsť predpis pre  $|0_{RPA}^+\rangle$  len približne, použitím QBA, alebo RQBA [Row68] (pozri časť 4.5).

Amplitúdy jednoduchých  $\beta^\pm$ -prechodov zo základného stavu jadra do  $m$ -tého vzbudeného stavu susedného jadrového systému, majú v QRPA formalizme nasledovné vyjadrenie:

$$\mathcal{B}_m^- = \langle m, JM | \hat{\beta}_{JM}^- | 0_{RPA}^+ \rangle = \langle 0_{RPA}^+ | [Q_{JM}^{(m)}, \hat{\beta}_{JM}^-] | 0_{RPA}^+ \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\hat{j}} \sum_{pn} \hat{O}(pnJ) (u_p v_n X_{pn}^{(m)} + v_p u_n Y_{pn}^{(m)}) D_{pnJ}, \\
\mathcal{B}_m^+ &= \langle m, JM | \hat{\beta}_{JM}^+ | 0_{RPA}^+ \rangle = \langle 0_{RPA}^+ | [Q_{JM}^{(m)}, \beta_{JM}^+] | 0_{RPA}^+ \rangle \\
&= \frac{(-1)^{J-M}}{\hat{j}} \sum_{pn} \hat{O}(pnJ) (u_n v_p X_{pn}^{(m)} + v_n u_p Y_{pn}^{(m)}) D_{pnJ}. \quad (2.37)
\end{aligned}$$

$\hat{\beta}_{JM}^\pm$  sú prechodové operátory  $A^F(0)$ ,  $A_k^{GT}(0)$  z (2.17).  $\hat{O}(pnJ=0) = \langle p || \tau^+ || n \rangle$  pre Fermiho prechody a  $\hat{O}(pnJ=1) = \langle p || \tau^+ \sigma_1 || n \rangle$  pre Gamow–Tellerove  $\beta$ -prechody, pričom  $|p\rangle$  ( $|n\rangle$ ) je jednočasticový stav protónu (neutrónu). Celkové sily jednoduchých  $\beta$ -premién, definované ako sumy štvorcov  $\beta$ -amplitúd cez všetky vzbudené stavy  $m$ , všeobecne spĺňajú Ikedovo sumačné pravidlo (ISR) [IUY65]:

$$\sum_m \{ |\langle m | \hat{\beta}_{JM}^- | g.s. \rangle|^2 - |\langle m | \hat{\beta}_{JM}^+ | g.s. \rangle|^2 \} = \langle g.s. | [\hat{\beta}_{JM}^+, \hat{\beta}_{JM}^-] | g.s. \rangle = \hat{J}^2(N - Z). \quad (2.38)$$

V ňom  $N$  ( $Z$ ) je počet neutrónov (protónov) jadra so základným stavom  $|g.s.\rangle$ , z ktorého sú dané  $\beta$ -prechody počítané. V QRPA metódach pre rozdiel celkových jednoduchých  $\beta$ -síl platí:

$$\begin{aligned}
\sum_m (|\mathcal{B}_m^-|^2 - |\mathcal{B}_m^+|^2) &= \sum_{pn} \hat{O}^2(pnJ) (v_n^2 - v_p^2) = \hat{J}^2(N - Z) \quad (\text{QRPA}), \\
&= \sum_{pn} \hat{O}^2(pnJ) (v_n^2 - v_p^2) D_{pnJ} \quad (\text{RQRPA}). \quad (2.39)
\end{aligned}$$

Štandardné QRPA priblíženie spĺňa ISR z definície vďaka jednoduchému tvaru normovacej QRPA matice  $\mathcal{U}(pn p' n' J) = \delta_{pp'} \delta_{nn'}$ . V RQRPA je z dôvodu presnejšieho výpočtu  $\mathcal{U}(pn p' n' J)$  Ikedovo sumačné pravidlo narušené [TS97]. Uvedený nedostatok sa snaží eliminovať „self-konzistentná“ verzia **RQRPA** metódy (SCQRPA) [BKZ00; DDS97; D<sup>+</sup>00]. Jej princíp spočíva v tom, že pri riešení BCS rovnice (dodatok A) sa definuje správny počet častíc v stave  $|0_{RPA}^+\rangle$  a nie na úrovni BCS vákua. Takto dostávame:

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_p \hat{j}_p^2 \{ v_p^2 + (1 - 2v_p^2) \langle 0_{RPA}^+ | [\alpha_p^\dagger \tilde{\alpha}_p]^{00} | 0_{RPA}^+ \rangle \}, \\
N &= \sum_n \hat{j}_n^2 \{ v_n^2 + (1 - 2v_n^2) \langle 0_{RPA}^+ | [\alpha_n^\dagger \tilde{\alpha}_n]^{00} | 0_{RPA}^+ \rangle \}. \quad (2.40)
\end{aligned}$$

Výpočet hustôt kvázičasticových stavov na pravej strane vzťahov (2.40) sa realizuje rovnakým postupom, aký bol naznačený pri ich vyjadrení v rovnici (2.35), t.j. budú závisieť od hodnôt  $D_{pnJ}$ . Cez celkový počet nukleónov tak do BCS rovníc vstupuje renormalizačný faktor  $D_{pnJ}$  z RQRPA, čím sa do BCS modelu zavádzajú QRPA korelácie medzi kvázičasticami. SCQRPA metóda spĺňa ISR exaktne v prípade Fermiho  $\beta$ -prechodov. Môžeme sa o tom presvedčiť dosadením vyjadrenia (2.35) pre  $D_{pnJ}$  do rovnice (2.39). Využijeme pritom rovnosť hodnôt protónových



a neutrónových kvázičasticových hustôt, pretože Fermiho  $\beta$ -prechody umožňujú vytvárať protón–neutrónové konfigurácie len zo stavov s rovnakými kvantovými číslami. Keď zohľadníme nové definície (2.40) celkového počtu nukleónov, získame pre ISR správny výsledok  $N - Z$ . Gamow–Tellerove  $\beta$ -prechody dovoľujú miešať rôzne jednočasticové úrovně v protón–neutrónových konfiguráciách. Preto SCQRPA v tomto prípade nespĺňa ISR, podobne ako RQRPA [BKZ99]. Problému nezachovania ISR v SCQRPA sa v súčasnosti venuje veľká pozornosť. Nedávno bola publikovaná modifikácia QRPA metódy [RF02], ktorá dokáže exaktne zabezpečiť platnosť ISR aj v prípade Gamow–Tellerových prechodov. Dosiaľ je však otáznou možnosť jej aplikácie v realistických výpočtoch.

Samotný výpočet  $2\nu\beta\beta$  maticových elementov ( $M^{2\nu}$ ) pozostáva z dvoch rôznych QRPA (RQRPA) diagonalizácií, týkajúcich sa opisov  $\beta$ -prechodov z pôvodného  $(A, Z)$  do prechodového jadra  $(A, Z+1)$  a z prechodového  $(A, Z+1)$  do konečného jadra  $(A, Z+2)$ . Vzbudené stavy prechodového jadra, generované v rámci QRPA (RQRPA) zo základných stavov pôvodného a konečného jadra ( $|m_i, J\rangle$  a  $|m_f, J\rangle$ ), nie sú identické v dôsledku používaných priblížení. Tento jav sa označuje ako *dvojvákuový problém*. Pokus o jeho riešenie predstavuje TVRPA<sup>1</sup> metóda [T<sup>+</sup>95], v ktorej sa vzbudené stavy prechodového jadra definujú pomocou lineárnej kombinácie základných stavov jadier  $(A, Z)$  a  $(A, Z+2)$ . Táto myšlienka však nepriniesla očakávané zlepšenie predpovedaných hodnôt  $M^{2\nu}$ . V súčasných QRPA výpočtoch sa neekvivalentnosť vzbudených stavov rieši umelo – zavedením faktora prekrytia daných stavov  $\langle m_i, J | m_f, J \rangle$  do  $2\nu\beta\beta$  maticového elementu (2.18), (2.19) a použitím priemernej hodnoty excitačných energií  $E_{m_i}$ ,  $E_{m_f}$ , získaných z pôvodného a výsledného jadra. Pre  $M^{2\nu}$  potom dostaneme [ŠPF98b]:

$$M^{2\nu} = \sum_{\substack{m_f m_i \\ M'}} \frac{(-1)^{M'} \langle 0_f^+ | \hat{\beta}_{J-M'}^- | m_f, J \rangle \langle m_f, J | m_i, J \rangle \langle m_i, J | \hat{\beta}_{JM'}^- | 0_i^+ \rangle}{E_{m_i}/2 + E_{m_f}/2 - E_i + \Delta}. \quad (2.41)$$

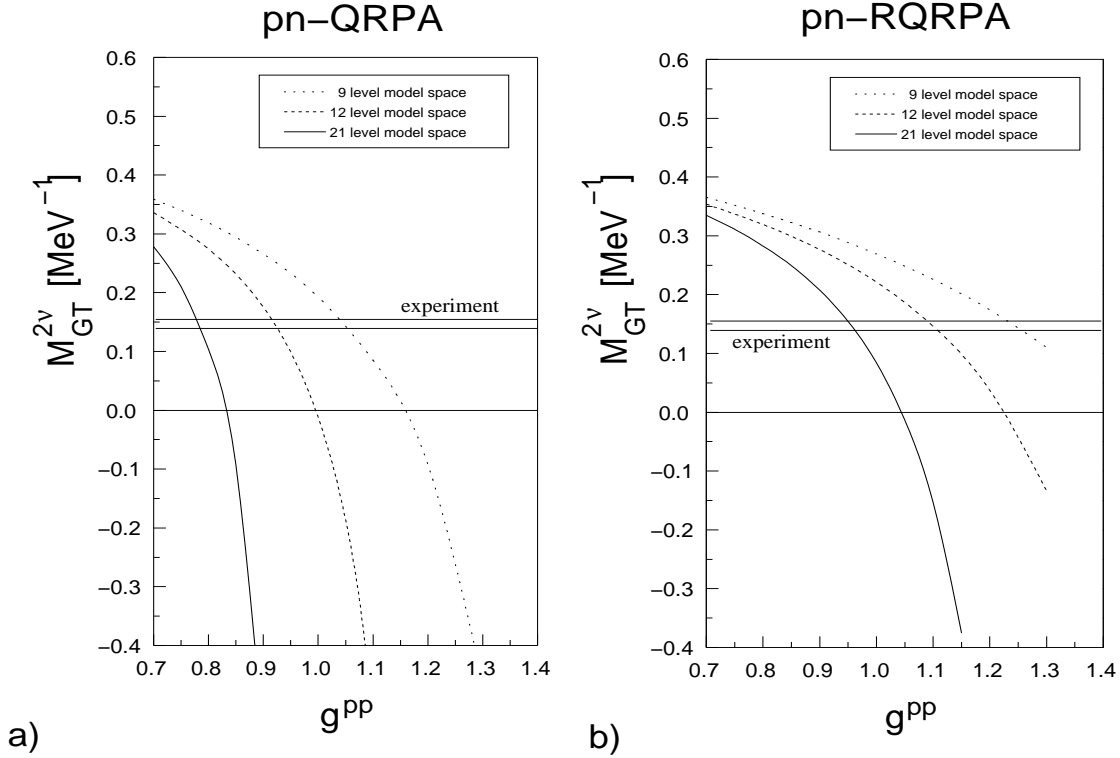
kde suma cez všetky projekcie  $M'$  pochádza z definície skalárneho súčinu amplitúd virtuálnych jednoduchých  $\beta$ -prechodov. Dôsledky uvedeného priblíženia vyplývajúceho z dvojvákuového problému zatiaľ nie sú dostatočne známe a sú predmetom štúdií.

V rámci QRPA výpočtov sa zavádzajú parametre  $g^{pp}$  a  $g^{ph}$ , ktorými sa renormalizuje časticovo-časticová a časticovo-dierová interakcia jadrového hamiltoniánu. Skutočná hodnota parametrov  $g^{pp}$  a  $g^{ph}$  by mala byť rovná 1 v prípade použitia realistickej nukleón–nukleónovej interakcie a dostatočne veľkého modelového priestoru. Ich odchýlky od danej hodnoty sú určené tým, že v rámci zvoleného modelového priestoru nemôžeme obsiahnuť celý Hilbertov priestor stavov. Parameter  $g^{ph}$  je zvyčajne fixovaný na základe experimentálnych údajov o polohe gigantickej Gamow-Tellerovej rezonancie alebo izobarického analógového stavu, zatiaľ čo  $g^{pp}$  je považovaný za voľný parameter pri určení maticových elementov  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu.

Na obrázkoch 2.4(a) a 2.4(b) je znázornená závislosť  $M_{GT}^{2\nu}$  maticového elementu od  $g^{pp}$  pre  $2\nu\beta\beta$ -rozpad jadra  $^{76}\text{Ge}$ , počítaná v pn-QRPA a pn-RQRPA [FŠ98]. V

<sup>1</sup>z anglického Two Vacua RPA

Obrázok 2.4: Gamow-Tellerov maticový element pre  $2\nu\beta\beta$ -rozpad  $^{76}\text{Ge}$  počítaný v rámci pn-QRPA (a) a pn-RQRPA (b) ako funkcia sily časticovo-časticovej interakcie  $g^{pp}$ . Výsledky sú prevzaté z práce [FŠ98]. Bodkovaná krivka odpovedá 9-úrovňovému modelovému priestoru, čiarkovaná 12-úrovňovému a plná čiara prislúcha výpočtom s 21 jednočasticovými úrovňami.



prípade QRPA výpočtov  $M_{GT}^{2\nu}$  extrémne citlivo závisí od parametra  $g^{pp}$  a v okolí fyzikálnej hodnoty  $g^{pp} \approx 1$  prechádza nulou, čo výrazne znižuje predpovedaciu schopnosť metódy. Na dôvažok v uvedenej oblasti riešenie QRPA kolabuje, t.j. energia prvého vzbuđeného stavu sa stáva imaginárnou, čo vylučuje použitie metódy pre väčšie hodnoty  $g^{pp}$ . Pre 9, 12 a 21 úrovňový modelový priestor sa kolaps QRPA riešenia vyskytuje pri kritických hodnotách  $g^{pp} = 1.3, 1.1$  a  $0.9$ . Nestabilita  $M_{GT}^{2\nu}$  a následný kolaps riešenia je spôsobený vytváraním príliš veľkého množstva korelácií základného stavu s rastúcim parametrom  $g^{pp}$  [VZ86; CFT87]. Príčinou takéhoto správania je nezachovanie Pauliho vylučovacieho princípu (t.j. použitie QBA) v QRPA. Jeho čiastočným reštaurovaním v rámci RQRPA (obr. 2.4 (b)) sa citlivosť  $M_{GT}^{2\nu}$  na  $g^{pp}$  znižuje a kolaps riešenia sa posúva do vyšších, nefyzikálnych oblastí hodnôt parametra  $g^{pp}$  [SŠF96]. V súčasnosti najstabilnejšie výsledky  $2\nu\beta\beta$  maticových elementov vzhľadom k zmene parametra  $g^{pp}$  poskytuje SCQRPA metóda [BKZ00]. Pre realistické výpočty vo veľkých modelových priestoroch je však aj približné uvažovanie Pauliho princípu v RQRPA (SCQRPA) nedostatočné. Väčší počet úrovní znamená viac korelácií základného stavu a teda kolaps RQRPA

(SCQRPA) riešenia už pre menšie hodnoty  $g^{pp}$ . Presnosť a hodnovernosť určovania maticových elementov tiež ovplyvňuje už spomenutý dvojjákuový problém.

### 2.2.3 Tamm–Dancoffova aproximácia

V predchádzajúcej časti bola prezentovaná jadrová metóda (QRPA) umožňujúca kolektívny opis základného a vzbuđených stavov mnohonukleónového systému. Tamm–Dancoffova aproximácia (TDA) [RS80] predstavuje model, ktorý slúži na výpočet excitovaných stavov jadra. Jej hlavný rozdiel v porovnaní s QRPA spočíva v tom, že sa konštruujú len vlnové funkcie vzbuđených stavov, zatiaľ čo základný stav jadra ponecháva TDA metóda nezmenený. Daný model je v skutočnosti limitným prípadom QRPA. Získame ho, keď v QRPA „vypneme“ budovanie korelácií v základnom stave, ktoré sú určované amplitúdami  $Y$ .

Opis vzbuđených stavov  $|m_{\text{TDA}}, JM\rangle$  v TDA zabezpečuje kolektívny operátor  $\Gamma_{JM}^{\dagger m}$ , pričom platí (podobne ako v QRPA):

$$\Gamma_{JM}^{\dagger m}|g.s.\rangle = |m_{\text{TDA}}, JM\rangle, \quad \Gamma_{JM}^m|g.s.\rangle = 0, \quad (2.42)$$

kde  $|g.s.\rangle$  je vlnová funkcia základného stavu uvažovaného jadra. Charakter excitácie mnohonukleónového systému je daný štruktúrou  $\Gamma_{JM}^{\dagger m}$ , ktorý na rozdiel od QRPA fonónového operátora, obsahuje len jeden typ variačných amplitúd. Pre protón–neutrónové vzbudenia meniace náboj máme

$$\Gamma_{JM}^{\dagger m} = \sum_{pn} Z_{pn}^m A^{\dagger}(pn; JM). \quad (2.43)$$

$Z_{pn}^m$  sú voľné variačné amplitúdy (korešpondujúce s amplitúdami  $X_{pn}^m$  v (2.29)). Modelové TDA rovnice sa získajú analogickým postupom ako v prípade odvodenia QRPA systému (2.31). Tvar TDA operátora (2.43) vedie na nasledovnú sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} \langle g.s. | [A(pn; JM), H, A^{\dagger}(p'n'; JM)] | g.s. \rangle Z_{pn}^m = \\ E_{\text{TDA}}^m \langle g.s. | [A(pn; JM), A^{\dagger}(p'n'; JM)] | g.s. \rangle Z_{pn}^m. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Jej diagonalizáciou dostaneme excitačné energie  $E_{\text{TDA}}^m$  jadra ( $A, Z \pm 1$ ) a amplitúdy  $Z_{pn}^m$ , pomocou ktorých vieme na základe (2.42) skonštruovať vlnové funkcie vzbuđených stavov systému ( $A, Z \pm 1$ ). Základný stav jadra ( $A, Z$ ) ( $|g.s.\rangle$ ) sa pri tom nemení, ale len používa. Musí byť vybraný tak, aby spĺňal podmienku vákua pre TDA operátor  $\Gamma_{JM}^m$  (druhá rovnosť v (2.42)).

Tamm–Dancoffova aproximácia môže byť užitočná v takých prípadoch, keď poznáme dobrý (QRPA) opis základného stavu jadra a potrebujeme počítať–doplňať jeho kolektívne vzbudenia.

### 2.2.4 Metóda expanzie prechodového operátora

V kapitole 2.1.2 bol naznačený alternatívny spôsob výpočtu jadrových maticových elementov  $2\nu\beta\beta$ –rozpadu, v ktorom nie je potrebná explicitná konštrukcia úplnej

sústavy vzbuđených stavov intermediálneho jadra. Metóda expanzie prechodového operátora (OEM) je jadrová–štruktúrna metóda, v ktorej sa počítajú  $2\nu\beta\beta$  maticové elementy bez sumovania cez virtuálne vzbužené stavy medzijadra. Existujú dva prístupy odvodenia Greenovej funkcie  $2\nu\beta\beta$ –prechodu v rámci OEM: (i) rozvoj energetického menovateľa  $M_{GT}^{2\nu}$ ,  $M_F^{2\nu}$  vo vzťahu (2.19), resp. (2.18) do Taylorovho radu podľa mocnín  $(E_n - E_i)/\Delta$  [CHW89] (postup OEM1), (ii) využitie integrálnej reprezentácie  $M_{GT}^{2\nu}$ ,  $M_F^{2\nu}$  (vzťahy (2.16), (2.15) a (2.27)), čo je vlastne princíp načrtnutý v kapitole 2.1.2 (postup OEM2) [ŠPF98a; FŠ98].

Metóda OEM1 je problematická kvôli otáznej konvergencii radu vytvoreného expanziou energetického menovateľa  $2\nu\beta\beta$  Greenovej funkcie [EHV92]. V OEM2 takýto problém nie je a uvažované aproximácie sú dobre kontrolovateľné. Časovo závislé  $\beta$ –prechodové operátory  $A_k^{GT}(t)$  ( $A^F(t)$ ) sú na základe vzťahu (2.27) vyjadrené cez nekonečnú sumu mnohonásobných komutátorov jadrového hamiltoniánu s príslušným Gamow–Tellerovým (Fermiho) operátorom  $A_k^{GT}(0)$  ( $A^F(0)$ ). Realizácia tohto výpočtu  $A_k^{GT}(t)$  ( $A^F(t)$ ) sa nezaobíde bez aproximatívnych požiadaviek na jadrový hamiltonián. OEM2 je založená na dvoch predpokladoch: 1. člen určujúci kinetickú energiu nie je dôležitý vo výsledku z počítaných komutátorov, preto sa jadrový hamiltonián aproximuje len dvojčasticovými interakčnými operátormi, 2. pri výpočtoch jednotlivých komutátorov sa uvažujú len dvojčasticové členy, pričom operátory vyšších rádov sa zanedbávajú.

Prvé priblíženie vychádza z toho, že použitie jednočasticového jadrového hamiltoniánu  $H_0$  vedie na výsledný  $2\nu\beta\beta$ –prechodový operátor  $[A(t/2), A(-t/2)]$  (pozri rovnice (2.16), (2.15)), ktorý je konštantný alebo má jednočasticový charakter. Keďže  $2\nu\beta\beta$ –operátor musí byť minimálne dvojčasticový, aby zmenil dva neutróny na dva protóny, jednočasticový člen celkového hamiltoniánu nebude mať dominantnú úlohu pri výpočte maticového elementu  $2\nu\beta\beta$ –prechodu. Pri druhej aproximácii je argumentom konštantná hodnota komutátora  $[A(t/2), A(-t/2)]$  v rámci kvázibozónového priblíženia (QBA). To znamená, že dvojčasticové ohraničenie členov  $[A(t/2), A(-t/2)]$  v OEM2 formalizme siaha za rámec QBA a RQBA [ŠPF98a]. OEM2 teda nie je priblížením ku QRPA, ako sa pôvodne predpokladalo. Štúdie OEM ukázali, že pre správne odvodenie  $2\nu\beta\beta$ –prechodového operátora je dôležité precízne zahrnutie Coulombovskej interakcie do jadrového hamiltoniánu, ktorá čiastočne supluje jeho zanedbané jednočasticové členy [FŠ98]. Významnú úlohu v OEM výpočtoch  $2\nu\beta\beta$  Greenovej funkcie tiež zohráva rozdiel energií základných stavov pôvodného a výsledného jadra [ŠPF98a]. Analytické vyjadrenie maticového elementu  $M_{GT}^{2\nu}$  v OEM formalizme spolu s príslušným tvarom použitého dvojčasticového jadrového hamiltoniánu s efektívnou Coulombovskou interakciou je podrobne uvedené napríklad v [ŠPF98a; ŠV98].

Na numerický výpočet hodnôt  $M_{GT}^{2\nu}$  v OEM je potrebné poznať vlnové funkcie pôvodného a výsledného jadra v  $2\nu\beta\beta$ –premene. Pre tento účel je možné použiť QRPA (RQRPA) vlnové funkcie. Cez ne sa do maticového elementu  $M_{GT}^{2\nu}$  zavádza funkčná závislosť od renormalizácie časticovo–časticovej interakcie ( $g^{pp}$ ) v QRPA hamiltoniáne. V práci [ŠV98] sú publikované OEM2 výpočty  $2\nu\beta\beta$ –rozpadu jadra  $^{76}\text{Ge}$  s využitím RQRPA vlnových funkcií. Získané hodnoty  $M_{GT}^{2\nu}$  vykazujú rovnaké

kvalitatívne správanie v závislosti od parametra  $g^{pp}$  ako elementy počítané v rámci RQRPA, t.j. funkcia  $M_{GT}^{2\nu}(g^{pp})$  je klesajúca a prechádza nulou vo fyzikálnej oblasti čísel  $g^{pp}$ . Pozorovaná veľká citlivosť  $M_{GT}^{2\nu}$  na zmenu  $g^{pp}$  sa pritom znásobuje pri použití väčšieho modelového priestoru na výpočet RQRPA vlnových funkcií [ŠV98]. To znamená, že výrazná závislosť  $2\nu\beta\beta$  maticových elementov (počítaných v OEM formalizme) od sily  $g^{pp}$  má pôvod vo výbere RQRPA vlnových funkcií základného stavu pôvodného a výsledného jadra, ktorých kvalita je diskutabilná napríklad v súvislosti s dvojjákuovým problémom. Predpokladá sa, že použitie iných vlnových funkcií (z vrstvomého modelu, alebo lepších QRPA priblížení) v OEM výpočtoch by zlepšilo predpovedaciu schopnosť tejto metódy pre  $2\nu\beta\beta$  proces.

## 2.3 Štúdie v rámci schématických modelov

Pri vývoji nových jadrovo-štruktúrnych metód a testovaní rôznych aproximácií sa bežne používajú schématické modely (napríklad SU(2) [HHC96; CHH97; R<sup>+</sup>00; Š<sup>+</sup>00; SS97], SO(5) [K<sup>+</sup>98; HHC97], SO(8) [DP98; E<sup>+</sup>97] symetrický model). Výhodou takéhoto postupu je:

- existencia exaktného riešenia pre požadovanú veličinu a s tým súvisiaca možnosť porovnávania výsledkov z aproximačných metód s presnými hodnotami,
- veličiny počítané v schématickom modeli vykazujú rovnaké kvalitatívne správanie ako v realistickom prípade,
- jednoduchý hamiltonián so schématickou interakciou, čo znamená relatívne malé výpočtové nároky v porovnaní s uvažovaním realistických interakcií.

### 2.3.1 Protón-neutrónový Lipkinov model

Pre štúdium jednoduchých a dvojitých  $\beta$ -rozpadov bol Kuzminom a Solovievom navrhnutý model so separabilnou interakciou [KS88], pomocou ktorého sa dajú dobre reprodukovať experimentálne Fermiho a Gamow–Tellerove  $\beta$ -prechody [H<sup>+</sup>96]. Daný model je podrobne charakterizovaný v kapitole 4.5 a pre účely QRPA štúdií Fermiho  $\beta$ -prechodov prepísaný do kvázičasticovej reprezentácie. Uvažovaním jednovrstvomého limitu uvedeného hamiltoniánu (4.80) (s rovnakým momentom hybnosti  $j$  pre protóny aj neutróny) dostávame schématický SO(5) model v kvázičasticovej reprezentácii:

$$H = E_p N_p + E_n N_n + \chi(\beta^- \beta^+ + \beta^+ \beta^-) - \kappa(P^- P^+ + P^+ P^-), \quad (2.45)$$

v ktorom

$$\begin{aligned} N_\tau &= \sum_m \alpha_{\tau m}^\dagger \alpha_{\tau m}, \quad (\tau = p, n), \\ \beta^- &= \hat{j}(u_p v_n A_{pn}^\dagger + v_p u_n A_{pn} - u_p u_n B_{pn}^\dagger + v_p v_n B_{pn}), \quad \beta^+ = (\beta^-)^\dagger, \\ P^- &= \hat{j}(u_p u_n A_{pn}^\dagger - v_p v_n A_{pn} + u_p v_n B_{pn}^\dagger + v_p u_n B_{pn}), \quad P^+ = (P^-)^\dagger. \end{aligned} \quad (2.46)$$

$E_p$  ( $E_n$ ) je energia protónovej (neutrónovej) kvázičastice a  $\alpha_\tau^\dagger$ , ( $\alpha_\tau$ ) je jej kreačný (anihilačný) operátor. Parameter  $\chi$  reprezentuje silu časticovo–dierovej ( $p$ - $h$ ) interakcie ( $g^{ph}$ ) a  $\kappa$  renormalizuje veľkosť časticovo–časticovej ( $p$ - $p$ ) interakcie ( $g^{pp}$ ). Bifermiónové operátory prítomné v reziduálnych častiach  $\beta^\pm$ ,  $P^\pm$  sú definované štandardným spôsobom (rovnako ako v (4.85)):

$$A_{pn}^\dagger = [\alpha_p^\dagger \alpha_n^\dagger]^{00}, \quad A_{pn} = (A_{pn}^\dagger)^+, \quad B_{pn}^\dagger = [\alpha_p^\dagger \tilde{\alpha}_n]^{00}, \quad B_{pn} = (B_{pn}^\dagger)^+. \quad (2.47)$$

BCS amplitúdy  $v_\tau$ ,  $u_\tau$ , získame pre model (2.45) priamo z rovníc (A.6) určujúcich počet častíc. Odtiaľ dostávame:  $v_p = \sqrt{Z/2\Omega}$ ,  $v_n = \sqrt{N/2\Omega}$ , ( $u_\tau = \sqrt{1 - v_\tau^2}$ ).  $\Omega$  charakterizuje degeneráciu uvažovanej  $j$ -vrstvy ( $2\Omega = 2j + 1 \equiv \hat{j}^2$ ).

Prezentovaný jednovrstvový hamiltonián (2.45), ktorého úlohou nie je reproduovať skutočné jadrové vlastnosti, sa ukázal ako veľmi užitočný pre štúdium rôznych mnohonukleónových priblížení na opis Fermiho  $\beta$ -prechodov. Z hľadiska QRPA sa s hamiltoniánom (2.45) dosahujú výsledky, ktoré majú kvalitatívne črty realistických QRPA výpočtov. Presnejšie, excitačné energie a amplitúdy  $\beta$  a  $\beta\beta$ -prechodov závisia od parametra  $\kappa$  rovnakým spôsobom ako v prípade jadrových modelov pozostávajúcich z mnohých jednočasticových úrovní a uvažujúcich realistickú nukleón-nukleónovú interakciu.

Ak v (2.45) zanedbáme takzvané rozptylové členy  $B_{pn}^\dagger$ ,  $B_{pn}$  (ktorých význam je študovaný v kapitole 4.3), získame **protón-neutrónový Lipkinov model** [HHC96]:

$$H_F = \epsilon C + \lambda_1 A^\dagger A + \lambda_2 (A^\dagger A^\dagger + AA). \quad (2.48)$$

Tu uvažujeme rovnaké kvázičasticové energie protónov a neutrónov ( $\epsilon = E_p = E_n$ ) a označujeme<sup>2</sup>  $C = N_p + N_n$ . Koeficienty  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  sú nasledovnými funkciami interakčných parametrov  $\chi$  a  $\kappa$ :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 4\Omega[\chi(u_p^2 v_n^2 + v_p^2 u_n^2) - \kappa(u_p^2 u_n^2 + v_p^2 v_n^2)], \\ \lambda_2 &= 4\Omega(\chi + \kappa)u_p v_n v_p u_n. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Poznamenajme, že pôvodný Lipkinov hamiltonián, publikovaný v [LMG65] dostaneme pri podmienke  $\lambda_1 = 0$ . Dôležitým aspektom modelu (2.48) je, že operátory  $\{A^\dagger, A, C\}$  spĺňajú algebru  $SU(2)$  grupy:

$$[A, A^\dagger] = 1 - \frac{C}{2\Omega}, \quad [C, A^\dagger] = 2A^\dagger, \quad [A, C] = 2A. \quad (2.50)$$

Exaktné riešenia pre protón-neutrónový Lipkinov model sa získajú diagonalizáciou hamiltoniánu (2.48) v priestore stavov

$$|n\rangle = \mathcal{N}(A^\dagger)^n |0\rangle, \quad 0 \leq n \leq 2\Omega, \quad (2.51)$$

kde  $\mathcal{N}$  je norma a  $|0\rangle$  predstavuje vákuum (BCS–vlnovú funkciu) pre operátory  $A^\dagger, A$ . Matica, ktorú je treba diagonalizovať, sa dá vyjadriť s použitím komutátorov

<sup>2</sup>pre jednoduchosť tiež vynechávame indexy v označeniach operátorov  $A_{pn}^\dagger$ ,  $A_{pn}$

(2.50). Jej nenulové elementy sú

$$\begin{aligned}\langle n|H_F|n\rangle &= 2 \epsilon n m_n + \lambda_1 \left(m_{n+1} - m_n + \frac{n m_n}{\Omega}\right), \\ \langle n-2|H_F|n\rangle &= \lambda_2 m_n,\end{aligned}\quad (2.52)$$

kde

$$m_n \equiv \langle 0|A^n(A^\dagger)^n|0\rangle = \frac{n! (2\Omega)!}{(2\Omega - n)! (2\Omega)^n}, \quad (n \leq 2\Omega). \quad (2.53)$$

Pre  $n > 2\Omega$ , sú hodnoty  $m_n$  nulové. Na záver dodajme, že vstupnými parametrami protón–neutrónového Lipkinovho modelu (ako aj uvedeného  $SO(5)$  modelu) sú okrem počtu protónov ( $Z$ ), neutrónov ( $N$ ) a ich momentu hybnosti  $j$ , aj energia kvázičastíc  $\epsilon$  (alebo  $E_p$ ,  $E_n$ ) a sily zbytkovej časticovo–dierovej ( $\chi$ ) a časticovo–časticovej ( $\kappa$ ) interakcie.

### 2.3.2 QRPA a Pauliho vylučovací princíp

Protón–neutrónový Lipkinov model (2.48) predstavuje vhodný objekt na štúdium významu Pauliho vylučovacieho princípu v rámci QRPA. S použitím  $SU(2)$  algebry (2.50) a hamiltoniánu  $H_F$  (2.48) je totiž možné sformulovať QRPA metódu, v ktorej je Pauliho princíp splnený presne [Š<sup>+</sup>00].

V uvedenom jednovrstvom modeli pre fonónový kreačný operátor platí

$$Q^\dagger = X A^\dagger - Y A, \quad (2.54)$$

pričom QRPA problém (2.31) sa redukuje na riešenie sústavy dvoch rovníc

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = E_{RPA} \begin{pmatrix} \mathcal{U} & 0 \\ 0 & -\mathcal{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

v ktorej

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \langle RPA|[A, H_F, A^\dagger]|RPA\rangle, \quad \mathcal{B} = -\langle RPA|[A, H_F, A]|RPA\rangle, \\ \mathcal{U} &= \langle RPA|[A, A^\dagger]|RPA\rangle.\end{aligned}\quad (2.56)$$

Energii vzbudeného stavu  $E_{RPA}$  ako aj variačné amplitúdy  $X$  a  $Y$  je možné vyjadriť analyticky pomocou elementov  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{U}$ :

$$E_{RPA} = (\bar{\mathcal{A}}^2 - \bar{\mathcal{B}}^2)^{1/2}, \quad \bar{X} = \frac{\bar{\mathcal{A}} + E_{RPA}}{\sqrt{(\bar{\mathcal{A}} + E_{RPA})^2 - \bar{\mathcal{B}}^2}}, \quad \bar{Y} = \frac{-\bar{\mathcal{B}}}{\sqrt{(\bar{\mathcal{A}} + E_{RPA})^2 - \bar{\mathcal{B}}^2}}. \quad (2.57)$$

V rovniciach (2.57) sú použité označenia:

$$\bar{X} = \mathcal{U}^{1/2} X, \quad \bar{Y} = \mathcal{U}^{1/2} Y, \quad \bar{\mathcal{A}} = \mathcal{U}^{-1/2} \mathcal{A} \mathcal{U}^{-1/2}, \quad \bar{\mathcal{B}} = \mathcal{U}^{-1/2} \mathcal{B} \mathcal{U}^{-1/2}. \quad (2.58)$$

Približný výpočet QRPA matíc  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{U}$  s využitím QBA (v štandardej QRPA) a RQBA (v renormalizovanej QRPA) vedie na nasledovné vzťahy:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 2\epsilon + \lambda_1, & \mathcal{B} &= 2\lambda_2, & \mathcal{U} &= 1, & & \text{(QRPA),} \\ \mathcal{A} &= 2\epsilon D + \lambda_1 D^2, & \mathcal{B} &= 2\lambda_2 D^2, & \mathcal{U} &= D = \left(1 + \frac{\bar{Y}^2}{\Omega}\right)^{-1}, & & \text{(RQRPA).} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Uvažovaný schématický model umožňuje aj presné určenie QRPA matíc, vychádzajúc z fermiónovej štruktúry  $A^\dagger, A, C$  operátorov, ktoré tvoria uzavretú algebru (2.50). Napríklad pre element  $\mathcal{U}$  máme

$$\mathcal{U} = 1 - \frac{\langle RPA|C|RPA\rangle}{2\Omega}. \quad (2.60)$$

Na výpočet  $\mathcal{U}$  a tiež  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  v tomto prípade potrebujeme poznať základný stav  $|RPA\rangle$ , ktorý je daný rovnicou  $Q|RPA\rangle = 0$ . Ukazuje sa, že už jej približné riešenie za QBA predpokladu  $[A, A^\dagger] = 1$ , konkrétne

$$|RPA\rangle = \mathcal{N} e^{-dA^\dagger A^\dagger} |0\rangle, \quad d = -\frac{Y}{2X}, \quad (2.61)$$

vedie na dobrý súhlas QRPA výpočtov s exaktnými  $[\check{S}^+00]$ . Rozvoj vlnovej funkcie (2.61) do radu po druhú mocninu koeficientu  $d$  využíva PP2-QRPA metóda. Pre daný model je však možné nájsť aj presné riešenie rovnice  $Q|RPA\rangle = 0$ , t.j. presné vyjadrenie základného stavu  $|RPA\rangle$   $[\check{S}^+00]$ :

$$|RPA\rangle = \mathcal{N} \sum_{n=0}^{\Omega} \beta_n (A^\dagger)^{2n} |0\rangle, \quad \beta_n = \frac{Y m_{2n-1}}{X m_{2n}} \beta_{n-1}. \quad (2.62)$$

Pomocou vlnovej funkcie (2.62) vieme bez priblížení určiť potrebné QRPA maticové elementy. Takéto QRPA riešenia s exaktným splnením Pauliho princípu (EPP-QRPA)  $[\check{S}^+00]$  boli zatiaľ nájsené len v rámci Lipkinovho modelu (2.48). Ich porovnanie s metódami narušujúcimi Pauliho vylučovací princíp umožňuje robiť závery ohľadom kvality použitých priblížení.

Prezentované schématické QRPA výpočty produkujú len jeden vzbudený stav ( $|0_1^+\rangle$ ) mnohonukleónového systému  $(A, Z + 1)$ . Preto pre  $2\nu\beta\beta$  maticový element platí:

$$M_F^{2\nu} = \frac{f \langle RPA|\beta^+|0_1^+\rangle \langle 0_1^+|\beta^-|RPA\rangle_i}{E_{RPA} + \Delta}. \quad (2.63)$$

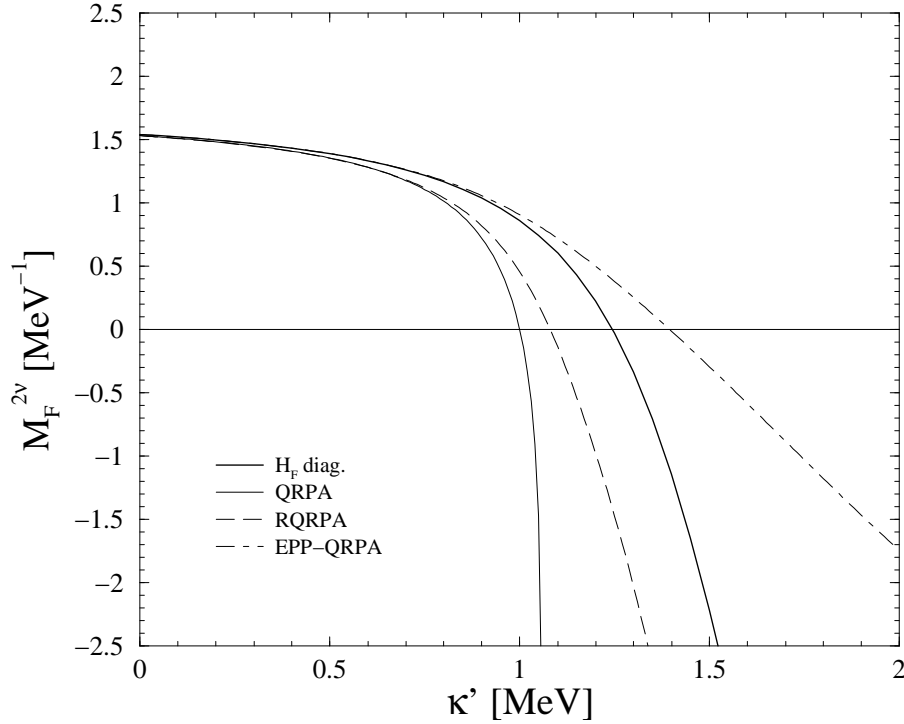
Stavy s indexami  $i$  a  $f$  prislúchajú počiatočnému  $(A, Z)$  a konečnému  $(A, Z + 2)$  jadru. Fermiho  $\beta^\pm$  operátory sú v uvažovanom modeli obmedzené na členy obsahujúce  $A^\dagger, A$ :

$$\beta^- = \sqrt{2\Omega}(u_p v_n A^\dagger + v_p u_n A), \quad \beta^+ = (\beta^-)^\dagger. \quad (2.64)$$

Na obrázku 2.5 sú prezentované vypočítané hodnoty  $M_F^{2\nu}$  v rámci rôznych variantov QRPA metódy ako funkcie  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa'$ . Pri uvádzaní schématických



Obrázok 2.5: Fermiho maticový element  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu ako funkcia parametra  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa'$ , získaný pomocou diagonalizácie hamiltoniánu  $H_F$  ( $H_F$  diag.), v rámci štandardnej QRPA (QRPA), renormalizovanej QRPA (RQRPA) a QRPA s exaktným uvažovaním Pauliho princípu (EPP-QRPA). Výpočet bol uskutočnený v  $[\tilde{S}^{+00}]$  pre jadrový prechod  $(N = 14, Z = 6) \rightarrow (N = 12, Z = 8)$  a hodnoty parametrov:  $\epsilon = 1\text{MeV}$ ,  $j = 19/2$ ,  $\chi' = 0.5\text{MeV}$ ,  $\Delta = 0.5\text{MeV}$ .



výsledkov je používaná redefinícia parametrov  $\chi$  a  $\kappa$ :

$$\chi' = 2\Omega\chi, \quad \kappa' = 2\Omega\kappa, \quad (2.65)$$

tak, aby tieto lepšie odpovedali realistickým hodnotám. Pre porovnanie je v grafe 2.5 uvedený aj maticový element získaný pomocou diagonalizácie  $H_F$ . Tvar QRPA a RQRPA krivky je kvalitatívne zhodný s priebehom nájdeným v realistických výpočtoch. Vidíme, že štandardné QRPA riešenie kolabuje v blízkosti  $\kappa' = 1\text{MeV}$  a kolaps RQRPA metódy je posunutý do väčších hodnôt  $\kappa'$ . V porovnaní s uvedenými výsledkami EPP-QRPA výpočty nekolabujú a získané maticové elementy  $M_F^{2\nu}$  sú podstatne menej citlivé k meniacemu sa parametru  $\kappa'$ . To ukazuje na dôležitosť Pauliho vylučovacieho princípu pri opise mnohonukleónovej sústavy. Napriek tomu, že EPP-QRPA metóda je presná (v daných výpočtoch QRPA matíc nie sú použité žiadne aproximácie), nedokáže reprodukovať exaktné hodnoty  $M_F^{2\nu}$  v oblasti veľkých  $p$ - $p$  síl. Predpokladanou príčinou tohto nedostatku je zaužívaná jednoduchá (lineárna) štruktúra QRPA fonónového operátora (2.54), respektíve (2.29).

Veľká pozornosť schématických štúdií sa venuje aj problému nezachovania Ikedovho sumačného pravidla v jednotlivých QRPA priblíženiach. Túto podmienku prekvapivo narušujú exaktné výpočty jednoduchých  $\beta$ -prechodov vyplývajúce z diagonalizácie hamiltoniánu  $H_F$  (2.48) a spolu s RQRPA tiež EPP-QRPA výpočty [Š<sup>+</sup>00]. Predpokladá sa, že nesplnené Ikedovo sumačné pravidlo súvisí so zanedbaním rozptylových členov  $B_{pn}^\dagger$ ,  $B_{pn}$  pri konštrukcii protón–neutrónového Lipkinovho hamiltoniánu. Ich uvažovaním sa vraciame späť do skôr definovaného schématického SO(5) modelu (2.45). V prácach [DDS97; K<sup>+</sup>98] sú publikované QRPA výpočty s použitím O(5) hamiltoniánu. Komutátory modelových QRPA matíc sú vyjadrené presne a Ikedovo sumačné pravidlo je splnené explicitne pomocou „self-konzistentnej“ podmienky modifikujúcej BCS amplitúdy  $u_\tau$ ,  $v_\tau$ . Z týchto štúdií však nie je jasné, aký je vplyv rozptylových členov hamiltoniánu na presnejšie QRPA výpočty (idúce za rámec RQRPA) a tiež ako sa ich zahrnutie prejaví v prípade exaktných výpočtov daných diagonalizáciou predmetného hamiltoniánu v kvázičasticovej reprezentácii.

### 2.3.3 Semiklasický opis excitácie mnohonukleónového systému

V tejto časti stručne uvedieme metódu, v rámci ktorej je mnohonukleónový systém opísaný klasickými rovnicami pohybu [R<sup>+</sup>00]. Daný model narába so strednými hodnotami kvantovomechanických operátorov v definovaných stavoch, preto sa označuje ako *semiklasický*. Predstavuje významnú časť schématických štúdií, lebo vysvetľuje kolaps štandardných QRPA výpočtov v kritickej hodnote  $p$ - $p$  interakcie ako fázový prechod mnohonukleónového systému do nového stavu. Vychádza sa z variačného princípu:

$$\delta \int_0^t \langle \psi | H - i \frac{\partial}{\partial t'} | \psi \rangle dt' = 0. \quad (2.66)$$

V ňom uvažujeme schématický protón–neutrónový Lipkinov hamiltonián (2.48) a dva nasledovné variačné stavy spolu s predpokladom týkajúcim sa komutátorov zodpovedajúcich operátorov:

$$\text{Stav 1: } |\psi_1(z, z^*)\rangle = \exp\{zA^\dagger - z^*A\}|0\rangle, \quad (2.67)$$

v ktorom  $[A, A^\dagger] = 1$ ,  $[C, A^\dagger] = 2A^\dagger$ ,  $[A, C] = 2A$ .

$$\text{Stav 2: } |\psi_2(z, z^*)\rangle = \exp\{zA^\dagger - z^*A\}|0\rangle, \quad (2.68)$$

s algebrou  $[A, A^\dagger] = 1 - C/2\Omega$ ,  $[C, A^\dagger] = 2A^\dagger$ ,  $[A, C] = 2A$ . V uvedených definíciách  $|0\rangle$  označuje vákuum pre kvázičasticové operátory a  $z$  je vo všeobecnosti komplexná funkcia premennej času ( $z = \rho e^{i\phi}$ , alebo  $z = x + iy$ ). Komutačné vzťahy prislúchajúce k stavu 1 reprezentujú *kvázibozónové priblíženie*, zatiaľ čo k stavu 2 je priradená presná algebra uvažovaného schématického modelu.

Analyzujeme najskôr prípad s prvou vlnovou funkciou  $|\psi_1\rangle$ . Ak položíme  $z = x + iy$  ( $z^* = x - iy$ ) a definujeme nové kánonické premenné  $\xi = \sqrt{2}x$ ,  $\eta = \sqrt{2}y$ ,

dostaneme z variačného princípu (2.66) Hamiltonove pohybové rovnice:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} = -\dot{\eta}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} = \dot{\xi}. \quad (2.69)$$

Stredná hodnota  $\mathcal{H}$  hamiltoniánu (2.48) v stave  $|\psi_1(z, z^*)\rangle$  má tvar

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(2\epsilon + \lambda_1)(\xi^2 + \eta^2) + \lambda_2(\xi^2 - \eta^2). \quad (2.70)$$

Eliminovaním  $\eta$  zo systému (2.69) dostávame rovnicu pre  $\xi$ , ktorá opisuje harmonický pohyb s frekvenciou

$$\omega = \sqrt{(2\epsilon + \lambda_1)^2 - 4\lambda_2^2}. \quad (2.71)$$

Tento výraz je identický s energiou  $E_{RPA}$ , počítanou štandardnou QRPA metódou (pozri prvý vzťah v (2.57)). Semiklasický formalizmus s použitím stavu 1 a QBA je teda ekvivalentný štandardnému QRPA opisu excitácie mnohonukleónového systému.

V ďalšom kroku uvažujme druhý prípad, t.j. vlnovú funkciu (2.68) a presné komutačné vzťahy. Pre strednú hodnotu hamiltoniánu (2.48) a klasický účinok vo variačnom stave (2.68) platí:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \langle \psi_2 | H | \psi_2 \rangle &= 4\epsilon\Omega |V|^2 + \lambda_1(2\Omega U^2 |V|^2 + |V|^4) + \\ &\quad \lambda_2(2\Omega - 1)U^2(V^2 + V^{*2}), \\ \langle \psi_2 | i \frac{\partial}{\partial t} | \psi_2 \rangle &= -2\Omega(\sin \rho)^2 \dot{\phi}, \end{aligned} \quad (2.72)$$

kde  $U = \cos \rho$ ,  $V = e^{-i\phi} \sin \rho$ . Zmenou kánonických premenných  $(z, z^*)$  na  $(r, \phi)$ , kde  $r = 2\Omega(\sin \rho)^2$ , dostaneme z variačného princípu (2.66) Hamiltonove rovnice (2.69) pre premenné  $r, \phi$ . Stredná hodnota  $\mathcal{H}$  v uvažovanom variačnom stave je daná nasledovne:

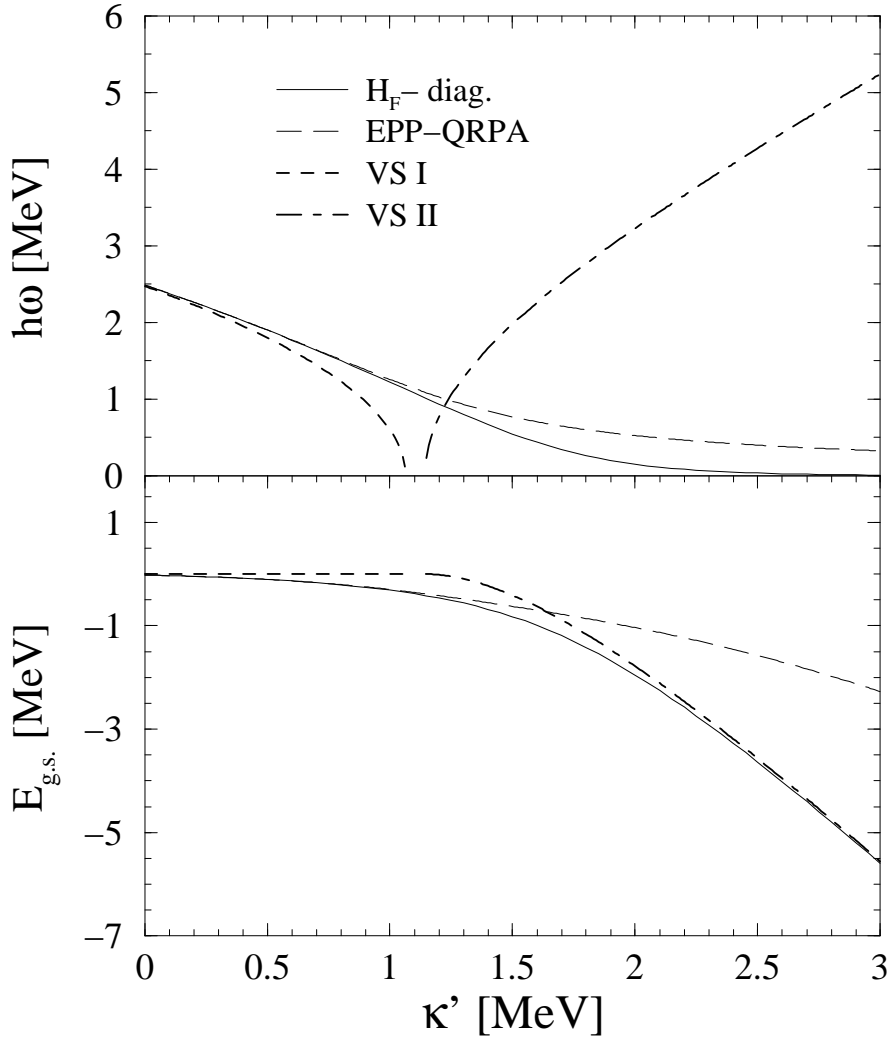
$$\mathcal{H} = 2\epsilon r + \lambda_1 \left[ r \left(1 - \frac{r}{2\Omega}\right) + \frac{r^2}{4\Omega^2} \right] + 2\lambda_2 \frac{2\Omega - 1}{2\Omega} r \left(1 - \frac{r}{2\Omega}\right) \cos(2\phi). \quad (2.73)$$

Z (2.73) vyplýva, že Hamiltonove rovnice sú v tomto prípade nelineárne. Analytické riešenie je možné získať v prípade ich linearizácie v okolí minima energetického povrchu  $\mathcal{H}(r, \phi)$ , čo zodpovedá opisu harmonických kolektívnych vibrácií jadra. V porovnaní s prvým, vyššie uvedeným prípadom, keď  $\mathcal{H}$  nadobúdalo svoju minimálnu hodnotu v počiatku kánonických súradníc, je teraz situácia odlišná. Minimum  $\mathcal{H}$  nachádzame pre nasledujúce nenulové hodnoty:

$$r^\circ = \frac{2\Omega^2}{2\Omega - 1} \cdot \frac{2\epsilon + \lambda_1 - 2\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{\Omega}}{\lambda_1 - 2\lambda_2}, \quad \phi^\circ = \frac{\pi}{2}. \quad (2.74)$$

Táto zmena znamená novú fázu pre jadrový mnohočasticový systém - nový deformovaný základný stav. Linearizácia Hamiltonových pohybových rovníc v okolí

Obrázok 2.6: Harmonické frekvencie  $\omega$  a energie základného stavu  $E_{g.s.}$  ako funkcie parametra  $\kappa'$ . VS I je riešenie s variačným stavom (2.67) a VS II s použitím vlnovej funkcie (2.68). Pre porovnanie sú uvedené aj príslušné energie získané diagonalizáciou hamiltoniánu (2.48) ( $H_F$ -diag.) a riešením QRPA rovníc s exaktným uvažovaním Pauliho princípu (EPP-QRPA).



minima potenciálnej energie  $\mathcal{H}(r^\circ, \phi^\circ)$  vedie na harmonické riešenia charakterizované frekvenciou

$$\omega = \left[ \frac{4\lambda_2}{\lambda_1 - 2\lambda_2} (2\epsilon + \lambda_1 - 2\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{\Omega}) (2\epsilon - \lambda_1 + 2\lambda_2 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\Omega}) \right]^{1/2}. \quad (2.75)$$

Vypočítané harmonické frekvencie (2.71), (2.75) a príslušné energie základného stavu (t.j. funkčné hodnoty  $\mathcal{H}$  (2.70) a (2.73) v minime uvažovaných kánonických súradníc) ako funkcie  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa'$  sú nakreslené na obrázku 2.6. Pre porovnanie uvádzame aj hodnoty získané pomocou QRPA s exaktným uvažovaním

Pauliho princípu (EPP-QRPA) a diagonalizáciou  $H_F$  [rovnic (2.48)]. Použité modelové parametre sú:  $j = 9/2$ ,  $\chi' = 0.5\text{MeV}$ ,  $\epsilon = 1\text{MeV}$ ,  $Z = 4$  a  $N = 6$ . Prvý mód s nulovou minimálnou energiou základného stavu existuje v intervale  $\kappa' \in (0, 1.06)\text{MeV}$ . Druhý mód v novej fáze jadrového systému bol nájdený pre hodnoty  $\kappa' \in (1.15, 3)\text{MeV}$ . Z dolnej časti grafu 2.6 vidno, že QRPA opis základného stavu nie je uspokojivý pre veľké hodnoty  $p$ - $p$  interakcie. Avšak použitie semiklasického postupu s variačným stavom (2.68) vedie k veľmi dobrej reprodukcii exaktných hodnôt energie základného stavu mnohofermiónového systému. Snahou teda je spojiť prednosti EPP-QRPA metódy s precíznym (semiklasickým) opisom základného stavu jadra. Veľký rozdiel medzi presným a VS II riešením v prípade excitačnej energie sa vysvetľuje prítomnosťou neharmonických efektov vo vzbudenom stave, ktoré semiklasický postup neopisuje.

Poznamenajme, že možnosť interpretácie kolapsu QRPA riešenia ako signál fázového prechodu v jadre, bola naznačená aj v práci [CHH97]. Pomocou minimalizácie energie základného stavu v Lipkinovom modeli (2.48) s použitím komplexného tvaru variačnej vlnovej funkcie je demonštrovaná zmena v štruktúre základného stavu jadrového systému indukovaná renormalizáciou časticovo-časticovej interakcie medzi nukleónmi.

# Kapitola 3

## Ciele práce

Predložená dizertačná práca sa zaoberá štúdiom štruktúry jadra v súvislosti s aplikáciou na výpočet jednoduchých a dvojitých  $\beta$ -prechodov. V úvodných kapitolách sme prezentovali bežne používané modely a metódy na opis štruktúry jadra a výpočet maticových elementov  $\beta$ - a  $\beta\beta$ -premeny (napríklad QRPA a jej modifikácie). Zároveň boli formulované najdôležitejšie nedostatky a ohraničenia spomenutých mnohonukleónových priblížení. Cieľom tejto dizertačnej práce je analýza uvedených nedostatkov daných metód s možnosťou ďalšieho zdokonalenia opisu jadrových procesov v týchto teóriách. Podstatná časť práce je venovaná novým QRPA modifikáciám navrhnutým v rámci algebraických modelov so známym exaktným riešením pre veličiny, ktoré sú predmetom fyzikálneho záujmu. Ďalej je prezentovaný netriviálny výpočet maticového elementu  $2\nu\beta\beta$ -prechodu, ktorý nevyžaduje konštrukciu intermediálnych vzbudných stavov. Na záver predkladáme vôbec prvú aplikáciu navrhutej PP-QRPA metódy [Š<sup>+</sup>00] na realistický výpočet Fermiho jednoduchých a dvojitých  $\beta$ -prechodov. Uvedená QRPA modifikácia počíta RPA matice vo fermiónovom priestore perturbatívnym spôsobom, pomocou rozvoja QRPA vlnovej funkcie. Umožňuje získať väčšiu nezávislosť predpovedaných  $2\nu\beta\beta$  maticových elementov voči zmene parametrov jadrového hamiltoniánu v porovnaní s jednoduchšími modifikáciami QRPA metódy, používanými v súčasných realistických výpočtoch.

V rámci piatich projektov spomenutých v úvode, sú stanovené nasledovné ciele:

- QRPA s optimálnym základným stavom (QRPA-OGS):
  - V súvislosti s tým, že experimentálne hodnoty  $2\nu\beta\beta$  maticových elementov sú v rámci realistických QRPA výpočtov reprodukované práve v blízkosti kolapsu QRPA riešenia, čo znižuje predpovedaciu schopnosť danej metódy, našim cieľom je pochopenie fyzikálnej podstaty kolapsu štandardnej QRPA metódy pri istej kritickej hodnote časticovo-časticovej ( $p$ - $p$ ) interakcie jadrového hamiltoniánu. Motiváciou tohto štúdia sú poznatky získané v semiklasickom opise excitácie jadier [R<sup>+</sup>00], kde boli nájdené nové riešenia v oblasti za kolapsom štandardnej QRPA metódy. Tieto riešenia vznikajú v dôsledku reorganizácie

nukleónov v základnom stave jadra a predstavujú harmonické vibrácie okolo daného základného stavu.

- Hľadanie nových QRPA riešení (kolektívnych módov) v oblasti veľkej hodnoty  $p$ - $p$  interakcie, založené na získaných poznatkoch semiklasických štúdií. Cieľom je vytvorenie novej QRPA modifikácie (QRPA-OGS) so zlepšením opisu základného stavu jadra variačným spôsobom pomocou zavedenia doplnkového stupňa voľnosti. Ide o dôležitý krok, ak chceme umožniť opis zmeny konfigurácie nukleónov v QRPA základnom stave. Dosiaľ používaná konštrukcia základného stavu v QRPA priblíženiach sa javí ako nedostačujúca [Š<sup>+</sup>00]. Našou snahou je tiež porozumieť rozdielu medzi semiklasickým a exaktným riešením v oblasti za kolapsom štandardnej QRPA metódy.
  - Aplikácia novej QRPA-OGS metódy v rámci schématického Lipkinovho modelu. Analýza ohraničení QRPA-OGS skúmaním stredného počtu častíc v základnom a excitovanom stave. Použitie QRPA-OGS modifikácie na konštrukciu jednoduchých  $\beta$ -prechodov a Fermiho maticového elementu  $2\nu\beta\beta$ -premeny.
- Nelineárny fonónový operátor v QRPA modeli:
    - Analýza možnosti zahrnutia nelineárnych členov do fonónového operátora v rámci QRPA metódy. Motiváciou je snaha o dokonalejší QRPA opis prvého vzbudeného stavu ako aj dvoj a viacfonónových vzbudení mnohonukleónových sústav v algebraických modeloch. Doposiaľ boli uskutočnené len neúspešné pokusy o zahrnutie nelineárnych členov do QRPA fonónového operátora za účelom výpočtu dvojfonónových stavov.
    - Hľadanie vhodného nelineárneho tvaru QRPA fonónového operátora na základe porovnania konkrétnych QRPA výpočtov excitačných energií s presnými výsledkami v protón–neutrónovom Lipkinovom modeli. Cieľom je získanie všeobecného predpisu pre nelineárny QRPA fonónový operátor, ktorý zabezpečuje najlepšiu reprodukciu exaktných výsledkov pre uvažované veličiny v danom modelovom priestore.
    - Test získaných QRPA vlnových funkcií pomocou výpočtov ich prekrytia s príslušnými exaktnými stavmi. Určenie stredného počtu kvázičastíc v QRPA základnom a excitovanom stave.
    - Navrhnutie nového QRPA výpočtu dvojitého  $\beta$ -prechodov bez použitia dvojvákuového priblíženia, pričom základný stav pôvodného jadra  $(A, Z)$  bude uvažovaný ako dvojfonónový stav generovaný zo základného stavu konečného jadra  $(A, Z + 2)$  pomocou protón–neutrónovej QRPA metódy. Porovnanie získaných výsledkov s predpoveďami doposiaľ používaných metód.

- Ikedovo sumačné pravidlo a úloha rozptylových členov modelového hamiltoniánu, Plne renormalizovaná QRPA metóda:
  - Štúdium možnosti splnenia Ikedovho sumačného pravidla (ISR) pre jednoduché  $\beta$ -prechody zahrnutím takzvaných rozptylových členov hamiltoniánu do rôznych modifikácií QRPA metód idúcich za rámec RQRPA priblíženia. Rozptylové členy hamiltoniánu sa v RQRPA modifikácii zanedbávajú a existuje predpoklad, že ich uvažovanie pri výpočte  $\beta$ -prechodov môže viesť k obnoveniu platnosti ISR [Š<sup>+</sup>00]. Naším cieľom je preveriť túto hypotézu.
  - Nedávno prezentované Plne renormalizované QRPA priblíženie (FR-QRPA) [RF02] z definície zabezpečuje zachovanie Ikedovho sumačného pravidla. Dosiaľ však nebolo realizované kvôli problému určenia FR-QRPA základného stavu. Naším cieľom je použitie rôznych ansatzov pre FR-QRPA základný stav a nájdenie spôsobu výpočtu RPA matíc v rámci FR-QRPA, ako aj uskutočnenie FR-QRPA výpočtov v SO(5) schématickom modeli.
  - Diskusia získaných FR-QRPA výsledkov, ich porovnanie s presnými a QRPA výpočtami. Štúdium vplyvu rozptylových členov hamiltoniánu a rôznych uvažovaných tvarov RPA základného stavu na výpočet  $2\nu\beta\beta$  Fermiho maticového elementu v rámci FR-QRPA metódy.
- Výpočet jednoduchých a dvojitých  $\beta$ -prechodov v integrálnej reprezentácii
  - Odvodenie formalizmu na výpočet časovo závislých  $\beta$ -prechodových operátorov, ktoré sú potrebné pri konštrukcii síl  $\beta^\pm$ -rozpadov a maticového elementu  $2\nu\beta\beta$ -premeny v integrálnom tvare. Celý postup budujeme v bozónovom priestore s približným bozónovým obrazom protón-neutrónového Lipkinovho hamiltoniánu, čo umožňuje nájsť presné vyjadrenia pre  $\beta$ -operátory v danom čase  $t$ .
  - Výpočet síl jednoduchých  $\beta^\pm$ -prechodov a  $2\nu\beta\beta$  Fermiho maticového elementu ( $M_F^{2\nu}$ ) v integrálnej reprezentácii, t.j. bez sumovania cez úplnú sústavu vzbudených stavov a energií intermediálneho jadra. Porovnanie získaných hodnôt s QRPA výsledkami (s výpočtom založeným na konštrukcii vzbudených stavov prechodového jadra) pre tieto veličiny.
  - Porovnanie získaných výsledkov pre  $M_F^{2\nu}$  určených integrálnymi výpočtami s existujúcimi QRPA predpoveďami. Diskusia dôsledkov vyplývajúcich z porovnania integrálnej a QRPA metódy výpočtu  $M_F^{2\nu}$  s ohľadom na prítomnosť dvojjákuovej neurčitosti v QRPA priblížení.
- QRPA s perturbatívnym splnením Pauliho vylučovacieho princípu:
  - Prvá aplikácia QRPA metódy s perturbatívnym splnením Pauliho princípu (PP-QRPA) v realistickom výpočte Fermiho  $\beta$ - a  $\beta\beta$ -prechodov



s použitím hamiltoniánu so separabilnou protón–neutrónovou interakciou. Uvedený model bol prezentovaný len v schématických štúdiách [Š<sup>+</sup>00]. Využívajúc prednosti práce vo fermiónovom priestore, PP-QRPA umožňuje lepšie splnenie Pauliho vylučovacieho princípu v rámci RPA teórie v porovnaní s bežne používanou RQRPA metódou, ktorá je založená na renormalizovanom kvázibozónovom priblížení. Konkrétnym cieľom je aplikácia PP-QRPA metódy na výpočet  $J^\pi = 0^+$  vzbudených stavov a energií jadra  $^{76}\text{As}$  (čo je prechodový jadrový systém pri  $\beta\beta$ –rozpade jadra  $^{76}\text{Ge}$ ); porovnanie získaného energetického spektra s výsledkami dosiaľ používaných metód (QRPA, RQRPA). Konštrukcia amplitúd jednoduchých  $\beta$ –rozpadov  $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{As}$  a  $^{76}\text{Se} \rightarrow ^{76}\text{As}$  pomocou PP-QRPA výpočtov. Štúdium stability silových funkcií uvedených  $\beta$ –prechodov pri meniacej sa  $p$ – $p$  interakcii. Hodnotenie a porovnanie stability voči zmene parametrov jadrového hamiltoniánu pri našej (PP-QRPA) metóde a ostatných uvažovaných QRPA modeloch.

- Aplikácia PP-QRPA modelu na výpočet Fermiho maticového elementu  $2\nu\beta\beta$ –premeny  $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$ . Zhodnotenie získaného výsledku z hľadiska možnosti nahradenia súčasných realistických výpočtov  $\beta$ – a  $2\nu\beta\beta$ –prechodov.

# Kapitola 4

## Nové metódy a dosiahnuté výsledky

### 4.1 QRPA s optimálnym základným stavom

V tejto časti je uvedený nový QRPA prístup pre výpočet vzбудených stavov jadra, jednoduchých a dvojitých  $\beta$ -prechodov. Prezentovaná metóda vychádza z poznatkov získaných semiklasickým opisom mnohonukleónového systému, t.j. poskytuje lepší opis základného stavu ako predošlé QRPA priblíženia a zároveň zabezpečuje splnenie Pauliho vylučovacieho princípu (podobne ako EPP-QRPA).

#### 4.1.1 Základné charakteristiky nového prístupu

Zo štúdií [CHH97; R<sup>+</sup>00] vyplýva, že nestabilita a kolaps QRPA riešenia pri kritickej hodnote časticovo-časticovej ( $p$ - $p$ ) interakcie ( $\kappa'_c$ ) môže súvisieť so zmenou v štruktúre základného stavu jadra. Podľa [R<sup>+</sup>00] je reorganizácia nukleónov v oblasti sily  $\kappa'_c$  indikátorom fázového prechodu v prípade harmonických kolektívnych excitácií mnohonukleónového systému. Na mieste je otázka existencie a hľadania riešenia pre  $\kappa' > \kappa'_c$  v rámci QRPA v prípade zmeneného základného stavu, čiže QRPA vákua. To ale vyžaduje principiálne zmeniť predpis pre vlnovú funkciu základného stavu  $|RPA\rangle$ , keďže samotné splnenie podmienky  $Q|RPA\rangle = 0$  nezaručuje správny opis energie základného stavu v QRPA pre  $\kappa' > \kappa'_c$ . Načrtnutý problém je možné riešiť použitím originálnej vlnovej funkcie s novým stupňom voľnosti, ktorý dovoľí optimalizovať variačným spôsobom QRPA základný stav. Ukazuje sa, že takto navrhnutá metóda sa dá realizovať v rámci schématického protón-neutrónového Lipkinovho modelu, jej formuláciou v bozónovej reprezentácii.

Použitím Marumoriho procedúry [SS97; Sam99] na mapovanie fermiónových operátorov do bozónového priestoru (pozri dodatok B), dostaneme pre hamiltonián (2.48) jeho bozónový obraz:

$$H_B = \alpha_{11}B^\dagger B + \alpha_{02}(B^\dagger B^\dagger + BB) + \alpha_{22}B^\dagger B^\dagger BB + \alpha_{13}(B^\dagger BBB + B^\dagger B^\dagger B^\dagger B), \quad (4.1)$$

kde

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= (2\epsilon + \lambda_1), \quad \alpha_{02} = \lambda_2 \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2\Omega}\right)}, \quad \alpha_{22} = -\frac{\lambda_1}{2\Omega}, \\ \alpha_{13} &= \lambda_2 \left[ \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2\Omega}\right)\left(1 - \frac{1}{\Omega}\right)} - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2\Omega}\right)} \right].\end{aligned}\tag{4.2}$$

$B^\dagger$ , ( $B$ ) je kreačný (anihilačný) bozónový operátor, pričom  $B^\dagger$  a  $B$  spĺňajú komutačný vzťah  $[B, B^\dagger] = 1$ . Pri mapovaní sme v (4.1) zanedbali členy obsahujúce šesť a viac bozónových operátorov, pretože hodnoty im prislúchajúcich koeficientov ( $\alpha_{24}, \alpha_{35}, \dots$ ) sú o niekoľko rádov menšie oproti hodnotám koeficientov uvedených v (4.2).

V nových QRPA výpočtoch definujeme originálny tvar vlnovej funkcie, ktorý umožní súčasne minimalizovať energiu základného stavu a splniť QRPA podmienku  $Q|RPA\rangle = 0$ :

$$|RPA\rangle = e^{t^*B - tB^\dagger} e^{zB^\dagger B^\dagger - z^*BB} | \rangle.\tag{4.3}$$

$| \rangle$  predstavuje vákuum pre bozónové operátory,  $t, z$  sú komplexné parametre:  $t = re^{i\theta}$ ,  $z = \rho e^{i\phi}$ . Vo vlnovej funkcii (4.3) zavádzame nový člen obsahujúci parametre  $t, t^*$ , aby bolo možné optimalizovať QRPA základný stav. Limitný prípad  $t = 0$ ,  $t^* = 0$  vedie na dosiaľ používaný predpis vlnovej funkcie v QRPA výpočtoch. Treba tiež poznamenať, že pre  $z = 0$ ,  $z^* = 0$  dostávame z (4.3) tvar variačného stavu použitého v semiklasickej mnohonukleónovej metóde [R<sup>+</sup>00] (pozri (2.67) a (2.68)). Uvažujúc zovšeobecnenú vlnovú funkciu (4.3) teda predpokladáme opísanie vyššie spomenutej reorganizácie v štruktúre základného stavu mnohonukleónového systému v súvislosti s kolapsom štandardného QRPA riešenia a tiež nájdenie nových módov pre daný systém v oblasti  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa' > \kappa'_c$ .

Základný stav (4.3) predstavuje vákuum pre fonónový operátor, t.j.  $Q|RPA\rangle = 0$ . Táto podmienka je splnená ak  $Q^\dagger$  zvolíme nasledovne:

$$Q^\dagger = X(B^\dagger + t^*) - Y(B + t), \quad Q = (Q^\dagger)^\dagger,\tag{4.4}$$

a súčasne platí

$$\mathcal{F}(r, \theta, \rho, \phi) = e^{i\phi} \sinh(2\rho) - \frac{Y}{X} \cosh(2\rho) = 0.\tag{4.5}$$

Funkcia  $\mathcal{F}$  implicitne závisí od premenných  $r, \theta$  cez amplitúdy  $X, Y$ . Systém QRPA rovníc je identický s (2.55). Matice  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{U}$  dostaneme z rovníc (2.56) zámenou  $(A, A^\dagger, H_F) \rightarrow (B, B^\dagger, H_B)$ . Ich vyjadrenia sú nasledovné (pre podrobný výpočet maticových elementov v stave (4.3) vid' dodatok C.1):

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &\equiv \langle RPA|[B, H_B, B^\dagger]|RPA\rangle = a_{11} + 4a_{22}v^2 + 6a_{13}uv \cos \phi \\ &\quad + r^2[4a_{22} + 6a_{13} \cos(2\theta)], \\ \mathcal{B} &\equiv -\langle RPA|[B, H_B, B]|RPA\rangle = 2a_{02} + 2a_{22}uv[\cos \phi - i \sin \phi] + 6a_{13}v^2 \\ &\quad + r^2[2a_{22}[\cos(2\theta) + i \sin(2\theta)] + 6a_{13}], \\ \mathcal{U} &\equiv \langle RPA|[B, B^\dagger]|RPA\rangle = 1, \quad u = \cosh(2\rho), \quad v = \sinh(2\rho).\end{aligned}\tag{4.6}$$

Vidíme, že matice  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{U}$  sú reálne, zatiaľ čo matica  $\mathcal{B}$  môže byť komplexná. Do úvahy vezmeme len prípad reálnych riešení, keď imaginárna časť  $\mathcal{B}$  je nulová [ $\phi = 2\theta = n\pi$ , ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )], pretože exaktné vlnové funkcie obsahujú len reálne komponenty. Dodatočné stupne voľnosti ( $t, t^*$ ), resp. ( $r, \theta$ ) určíme z požiadavky minima energie základného stavu, čiže základný stav (4.3) bude určený variačne. Máme:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(r, \theta) &= \langle RPA | H_B | RPA \rangle = C_0 + C_2 r^2 + C_4 r^4, \\ C_0 &= \alpha_{11} v^2 + 2\alpha_{02} uv \cos \phi + \alpha_{22} [u^2 v^2 + 2v^4] + 6\alpha_{13} uv^3 \cos \phi, \\ C_2 &= \alpha_{11} + 2\alpha_{02} \cos(2\theta) + \alpha_{22} [4v^2 + 2uv \cos(2\theta + \phi)] + \\ &\quad 6\alpha_{13} [uv \cos \phi + v^2 \cos(2\theta)], \\ C_4 &= \alpha_{22} + 2\alpha_{13} \cos(2\theta).\end{aligned}\tag{4.7}$$

Funkcia  $\mathcal{H}(r, \theta)$  nadobúda minimum pre:

$$\begin{aligned}\mathbf{a)} & r = 0, \theta - \text{ľubovoľné}, \quad \mathbf{b)} r = \sqrt{-C_2/(2C_4)}, \theta = 0, \\ \mathbf{c)} & r = \sqrt{-C_2/(2C_4)}, \theta = n\pi/2, \quad \mathbf{d)} r = \sqrt{-C_2/(2C_4)}, \theta \neq n\pi/2, n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}.\end{aligned}$$

Prípad d) by viedol ku komplexným hodnotám  $\mathcal{B}$  a preto ho vylúčime. Riešenia b), c), d) sú špecifické pre nový QRPA stav. Na určenie energií  $E_{RPA}$  a amplitúd  $X$ ,  $Y$  je potrebné súčasne splniť rovnice (2.55), (4.5) a niektorú z podmienok a), b), c). Obyčajne sa nelineárny QRPA problém rieši pomocou iteračného algoritmu, ktorý však negarantuje nájdenie všetkých riešení. V našom prípade využijeme prednosti daného schématického modelu a riešime sústavu rovníc úplne, čo umožňuje nájsť všetky QRPA riešenia, aj tie, ktoré by iteračným algoritmom mohli byť vynechané. Postup je nasledovný: Najskôr dosadíme parameter  $r$  ( $r = 0$  alebo  $r^2 = -C_2/2C_4$ ) do výrazov (4.6) pre matice  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{U}$ . Potom z jednej z QRPA rovníc (2.55) vyjadříme pomer amplitúd  $Y/X$  a tento dosadíme do podmienky (4.5). Riešením rovnice (4.5) [funkcia  $\mathcal{F}$  je vyjadrená len v závislosti od  $\rho$ ] získame všetky možné hodnoty  $\rho$ . Týmto spôsobom máme vypočítané všetky potrebné parametre, pomocou ktorých spätne určíme QRPA matice. Poznajúc hodnoty  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{U}$  vieme riešením QRPA rovníc (2.55) vypočítať QRPA vlastné hodnoty (energiu  $E_{RPA}$ ) a vlastné vektory (amplitúdy  $X$ ,  $Y$ ).

### 4.1.2 Test a aplikácia novej metódy vo výpočtoch $\beta$ a $\beta\beta$ prechodov

Konkrétne výpočty sme previedli pre systém s  $N = 6$ ,  $Z = 4$ ,  $j = 9/2$ ,  $\epsilon = 1\text{MeV}$  a  $\chi' = 0.5\text{MeV}$ . Sila  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa'$  je považovaná za voľný parameter a mení sa v rozmedzí intervalu (0, 3)MeV. Jej kritická hodnota (t.j. hodnota, pri ktorej štandardná QRPA metóda kolabuje) je v tomto prípade  $\kappa'_c = 1.06\text{MeV}$ . V tabuľke 4.1 sú prezentované parametre QRPA vlnovej funkcie (4.3), QRPA energie ( $E_{RPA}$ ) a energie základného stavu ( $E_{g.s.}$ ) pre  $\kappa' = 0.5, 1.5$  a  $2.5\text{MeV}$ . Vidíme, že v oblasti  $\kappa' < \kappa'_c$  existujú len riešenia typu a). Za predpokladanou reorganizáciou štruktúry jadra do nového (deformovaného) základného stavu ( $\kappa' > \kappa'_c$ ) sa ale objavili nové kolektívne módy typu c), ktoré sú špecifické pre novodefinované

Tabuľka 4.1: Energie základného stavu ( $E_{g.s.}$ ) a QRPA energie ( $E_{RPA}$ ) počítané pre hodnoty  $\kappa' = 0.5, 1.5$  a  $2.5\text{MeV}$ ,  $\chi' = 0.5\text{MeV}$  a  $j = 9/2$ . Uvedené sú aj parametre určujúce QRPA vlnovú funkciu (4.3) a energiu základného stavu.  $E_{g.s.}^{exact}$  sú energie získané diagonalizáciou  $H_F$  (rovnica (2.48)).

Typ riešenia	$\rho$	$\phi$	$r^2$	$2\theta$	$C_0$ [MeV]	$C_2$ [MeV]	$C_4$ [MeV]	$E_{g.s.}$ [MeV]	$E_{RPA}$ [MeV]
$\kappa' = 0.5 \text{ MeV}, E_{g.s.}^{exact} = -0.104 \text{ MeV}$									
a1	0.757	0	0	-	7.001	0.002	-0.100	7.001	0.046
a2	0.114	$\pi$	0	-	-0.104	3.004	-0.100	-0.104	1.906
$\kappa' = 1.5 \text{ MeV}, E_{g.s.}^{exact} = -0.823 \text{ MeV}$									
a2	0.308	$\pi$	0	-	-0.679	3.120	-0.100	-0.679	0.908
c1	0.755	0	0.438	$\pi$	7.004	-0.249	0.284	6.950	0.024
$\kappa' = 2.5 \text{ MeV}, E_{g.s.}^{exact} = -3.638 \text{ MeV}$									
a2	0.400	$\pi$	0	-	-1.841	3.344	-0.100	-1.841	0.675
c1	0.780	$\pi$	1.326	$\pi$	6.834	-1.264	0.476	5.996	0.112
c2	0.384	0	0.081	$\pi$	-1.832	-0.077	0.476	-1.835	0.719
c3	0.041	$\pi$	2.838	$\pi$	0.230	-2.705	0.476	-3.609	4.580

QRPA vlnovú funkciu (4.3). Riešenie a1) s malou QRPA energiou a veľmi veľkou hodnotou  $E_{g.s.}$ , ktoré sa ďalej transformuje v c1) riešenie, nebolo doposiaľ nájdené v QRPA výpočtoch. Je to preto, lebo boli použité iteračné algoritmy. Výsledok a2) korešponduje s EPP-QRPA výpočtom, ktorý bol opísaný v časti 2.3.2.

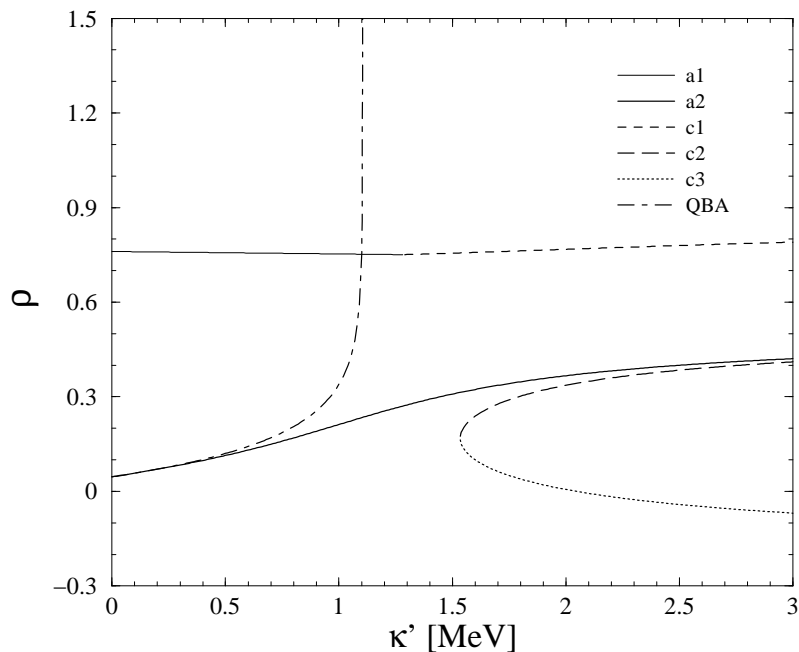
Obrázok 4.1, na ktorom je znázornená závislosť parametra  $\rho$  (modulu komplexného čísla  $z$ ) od sily  $p$ - $p$  interakcie, ukazuje na vlastnosti jednotlivých riešení. Z grafu 4.1 vyplýva, že mód a1) existuje pre  $\kappa' \in (0.0; 1.29)\text{MeV}$  a ďalej pokračuje v c1) móde. Hodnoty a2) sú nájdené na celom uvažovanom intervale  $\kappa'$ . Je to dané tým, že Pauliho vylučovací princíp zahrnutý v teórii cez vyššie členy v bozónovej expanzii  $H_F$  [rovnica (4.1)] zabezpečuje, aby dané riešenie nekolabovalo. Na grafe 4.1 ďalej vidíme, že nové módy mnohonukleónovej sústavy typu c) vznikajú v rovnakom bode  $\kappa' = 1.53\text{MeV}$ . Hodnoty c2) sa s rastúcim  $\kappa'$  blížia k a2) hodnotám. Parametre  $\rho$  odpovedajúce módu c3) sú veľmi malé. To znamená, že základný stav je v tomto prípade daný hlavne novozavedeným „deformačným“ členom (obsahujúcim parametre  $t, t^*$ ) vo vlnovej funkcii (4.3). Je zaujímavé, že nové módy typu c) vznikajú len v dôsledku vyšších členov (úmerných koeficientom  $\alpha_{22}, \alpha_{13}$ ) v bozónovom hamiltoniáne (4.1). V limite  $\Omega \rightarrow \infty$  (QBA priblíženie) sa predpis pre  $H_B$  z (4.1) redukuje na kvadratický hamiltonián

$$H_B^{(QBA)} = \alpha_{11} B^\dagger B + \alpha_{02} (B^\dagger B^\dagger + BB), \quad \alpha_{11} = 2\epsilon + \lambda_1, \quad \alpha_{02} = \lambda_2, \quad (4.8)$$

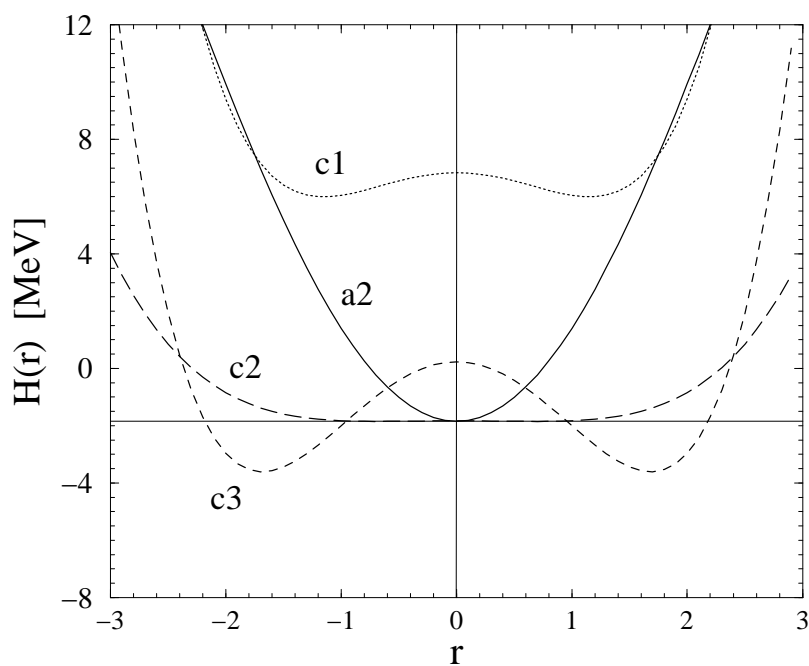
používaný vo výpočtoch v rámci štandardnej QRPA metódy. V danom prípade vzniká len jedno riešenie typu a) s kolapsom pri  $\kappa' = \kappa'_c$ . Toto riešenie je v obrázku 4.1 a aj v nasledujúcich prípadoch označované ako QBA.

Graf 4.2 znázorňuje energiu základného stavu  $\langle RPA | H_B | RPA \rangle$  ako funkciu parametra  $r$  ( $\mathcal{H}(r)$ ) pri danej  $p$ - $p$  interakcii  $\kappa' = 2.5\text{MeV}$  pre riešenia a2), c1),

Obrázok 4.1: Parameter  $\rho$  QRPA vlnovej funkcie (4.3) v závislosti od sily  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa'$ . Jednotlivé riešenia typu a) a c) sú opísané v texte. QBA je výsledok získaný s použitím kvadratického hamiltoniánu (4.8).



Obrázok 4.2: Stredná hodnota hamiltoniánu  $H_B$  (4.1) v  $|RPA\rangle$  vákuu (4.3) ako funkcia parametra  $r$  pri fixovanej  $p$ - $p$  interakcii  $\kappa' = 2.5\text{MeV}$ . Pôvod riešení a) a c) je diskutovaný v texte.



c2) a c3). Záporné hodnoty  $r$  majú rovnaký zmysel ako kladné, pretože počítaná energia sa zámienou  $t \rightarrow -t$  (t.j.  $\theta \rightarrow \theta + \pi$ ) nezmení. Na grafe 4.2 vidno minimum  $\mathcal{H}(r)$  v  $r = 0$  pre riešenie a) a nové minimá energie v prípade c) módov, lokalizované v bodoch  $r = \pm \sqrt{-C_2/(2C_4)}$ . Takýto špecifický priebeh  $\mathcal{H}(r)$  indikuje spontánne narušenie symetrie systému.

Na obrázku 4.3 sú uvedené závislosti energie základného stavu ( $E_{g.s.}$ ) a excitačnej energie ( $E_{RPA}$ ) od  $\kappa'$ , získané v štandardnej QRPA metóde, v QRPA s optimálnym základným stavom a pomocou  $H_F$  diagonalizácie. Prezentované sú len riešenia s malou hodnotou  $E_{g.s.}$ . Pre porovnanie sú do grafov 4.3 pridané energie vypočítané v rámci semiklasickej metódy [R<sup>+</sup>00]. Tento postup bol naznačený v časti 2.3.3. Na grafe 4.3 vidíme, že štandardné QRPA riešenie (QBA) pri  $\kappa'_c$  kolabuje a vykazuje rovnaké kvalitatívne správanie ako vo výpočtoch s realistickými interakciami v hamiltoniáne. Ako bolo skôr spomínané, a2) riešenie dobre súhlasí s EPP-QRPA hodnotami, ale neposkytuje uspokojivé výsledky pri veľkej sile  $p$ - $p$  interakcie ( $\kappa' > \kappa'_c$ ). Z obrázku 4.3 vyplýva, že riešenie c3) veľmi dobre reprodukuje základný stav získaný diagonalizáciou  $H_F$ , čo však neplatí v prípade  $E_{RPA}$  energie. Pozoruhodná je ale zhoda semiklasického a c3) riešenia pri oboch uvažovaných energiách. Na základe toho môžeme predpokladať, že c3) mód súvisí s harmonickými kmitmi okolo nového (deformovaného) základného stavu a veľký rozdiel medzi c3) a exaktným riešením v prípade  $E_{RPA}$  je spôsobený prítomnosťou neharmonických efektov vo vzbudenom stave. Zhodou semiklasického a c3) riešenia sa zároveň potvrdzuje fakt, že predošlý rozdiel medzi semiklasickým a EPP-QRPA riešením mal pôvod v rozdielnom opise základného stavu mnohonukleónovej sústavy.

### Stredné hodnoty operátora počtu kvázičastíc

Bežný test pre nové QRPA priblíženie predstavuje výpočet stredného počtu kvázičastíc v základnom a excitovanom stave. Dané veličiny totiž určujú mieru korelácií v príslušných vlnových funkciách.

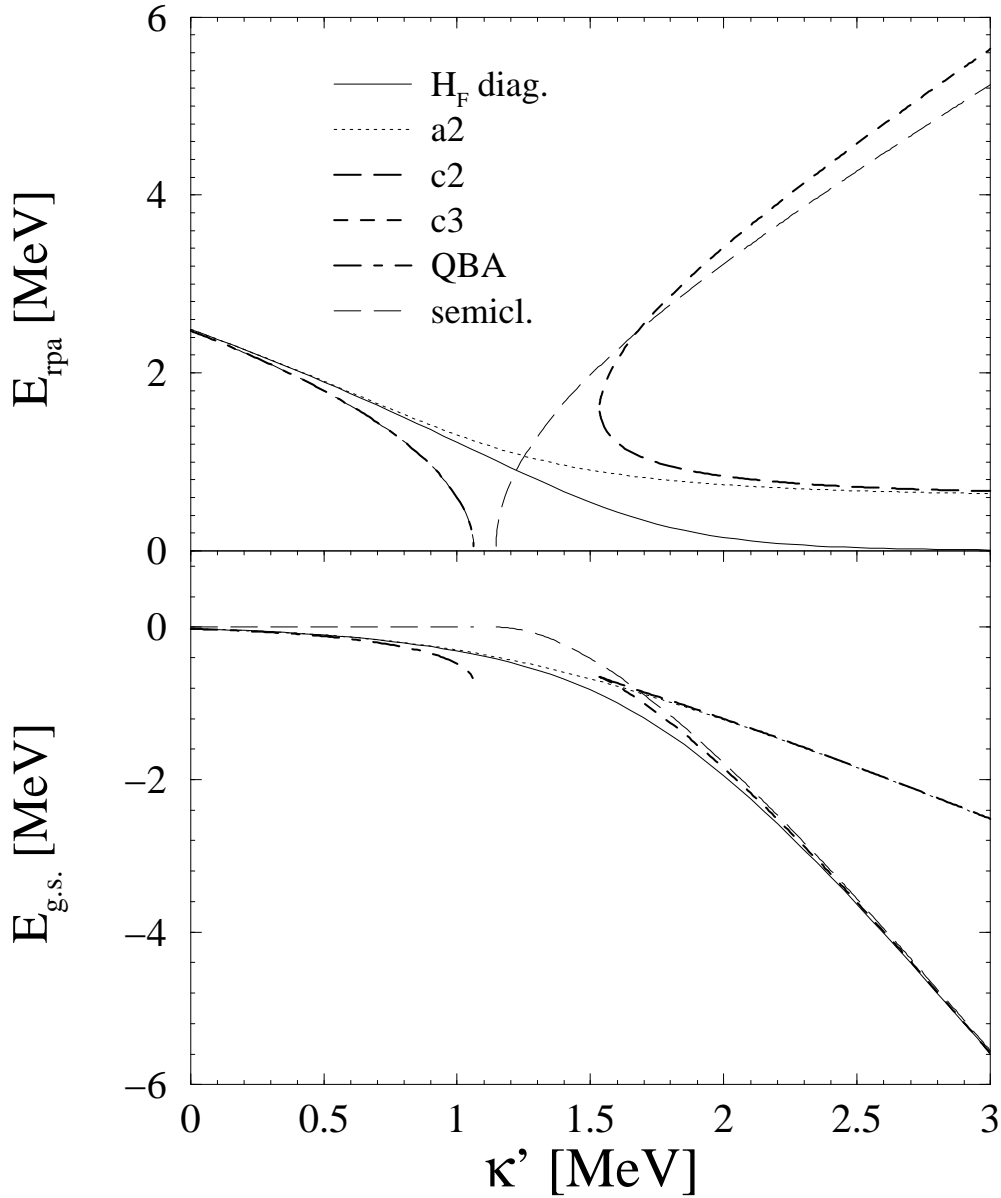
QRPA s optimálnym základným stavom je formulovaná v bozónovej reprezentácii. Bozónový obraz fermiónového operátora polovičného počtu kvázičastíc  $\hat{N}_F = C/2$  získame použitím Marumoriho procedúry [SS97]. V tomto prípade dostávame presný obraz  $\hat{N}_B = B^\dagger B$ . Predmetné veličiny potom definujeme nasledovne:

$$N_0 \equiv \langle RPA | \hat{N}_B | RPA \rangle, \quad \Delta N \equiv \langle RPA | Q \hat{N}_B Q^\dagger | RPA \rangle - N_0, \quad (4.9)$$

kde  $|RPA\rangle$  je základný stav (4.3) a  $Q^\dagger, Q$  sú dané rovnicou (4.4). Explicitné vyjadrenia  $N_0$  a  $\Delta N$  získame pomocou odvodených maticových elementov v dodatku C.1.

Grafy 4.4 a) a 4.4 b) zobrazujú závislosti  $N_0$  a  $\Delta N$  od  $\kappa'$ , počítané v rámci štandardnej QRPA, QRPA s optimálnym základným stavom, pomocou  $H_F$  diagonalizácie a semiklasickou metódou. Vidíme, že štandardná QRPA metóda (QBA) výrazne nadhodnocuje korelácie v základnom stave v blízkosti kolapsu a podobné správanie vykazuje aj v prípade veličiny  $\Delta N$ . Módy a2) a c2), ktoré majú podobný

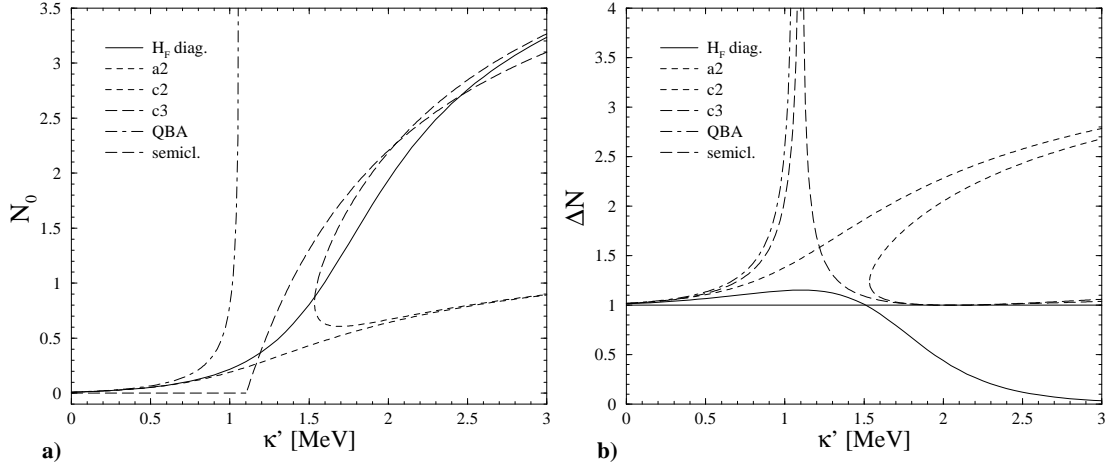
Obrázok 4.3: Energia základného stavu ( $E_{g.s.}$ ) a excitačná energia ( $E_{RPA}$ ) ako funkcia parametra  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa'$ .  $H_F$  diag. sú hodnoty získané diagonalizáciou hamiltoniánu (2.48), **a2**, **c2**, **c3** sú riešenia QRPA s optimálnym základným stavom (viď text), **QBA** energie sú výsledkom štandardnej QRPA. Pre porovnanie je uvedené semiklasické riešenie (**semicl.**), ktoré bolo nájdené v [R<sup>+</sup>00].



priebeh, naopak podhodnocujú exaktné hodnoty  $N_0$  (dané diagonalizáciou  $H_F$ ). Z obrázku 4.4 a) vidno, že **c3**) riešenie spolu so semiklasickým vynikajúco predpovedá exaktné počty kvázičastíc v základnom stave. V prípade excitovaného stavu (obr. 4.4 b)) **c3**) mód tiež predstavuje zlepšenie oproti existujúcemu **a2**) [resp. EPP-QRPA] riešeniu. Avšak ani jeden z prezentovaných výsledkov nereprodukuje



Obrázok 4.4: **a)** Stredná hodnota počtu kvázičastíc v základnom stave  $|RPA\rangle$  ako funkcia parametra  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa'$ . **b)** Rozdiel stredných hodnôt počtu kvázičastíc v excitovanom a základnom stave v závislosti od parametra  $\kappa'$ . Označenie jednotlivých riešení má rovnaký význam ako v grafe 4.3.



priebeh presných hodnôt ( $H_F$  diag.) v oblasti  $\kappa' > 1.5$  MeV, kde tieto klesajú k nule. Značný rozdiel medzi c3) a exaktnými hodnotami len potvrdzuje predpoklad o prítomnosti neharmonických efektov v excitovanom stave pre  $\kappa' > \kappa'_c$ .

### Amplitúdy jednoduchých Fermiho $\beta$ -prechodov

Uvažujme teraz jadrové prechody indukované Fermiho  $\beta^\pm$  operátormi [rovnice (2.64)]. Bozónové obrazy  $\beta_B^+$  a  $\beta_B^-$  (operátorov  $\beta^\pm$ ) skonštruujeme pomocou Marumoriho mapovania bifermiónových operátorov  $A^\dagger$ ,  $A$  (viď dodatok B):

$$\begin{aligned} A^\dagger &= B^\dagger + \alpha_{21} B^\dagger B^\dagger B + \alpha_{32} B^\dagger B^\dagger B^\dagger B B + \dots, \\ A &= (A^\dagger)^\dagger, \end{aligned} \quad (4.10)$$

kde koeficienty  $\alpha$  sú:

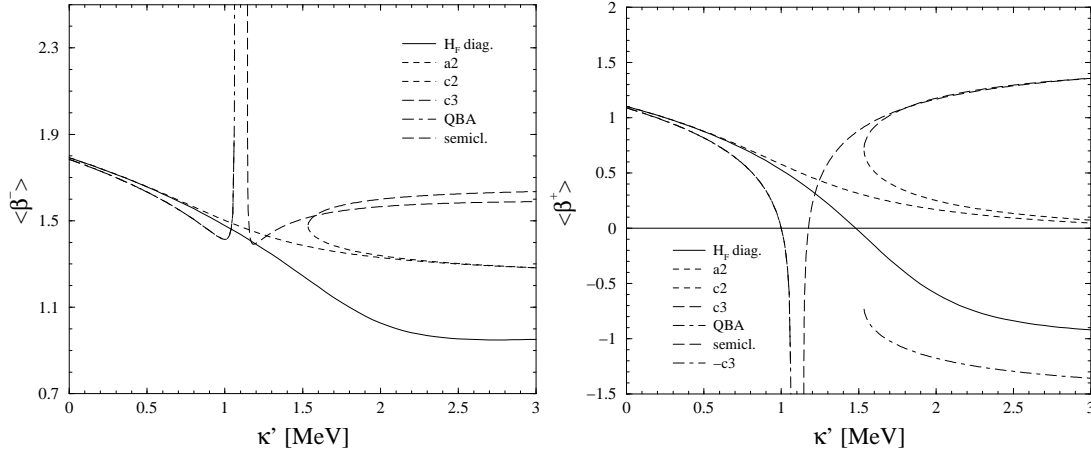
$$\alpha_{21} = \sqrt{1 - \frac{1}{2\Omega}} - 1, \quad \alpha_{32} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\Omega}} - \sqrt{1 - \frac{1}{2\Omega}} + \frac{1}{2}. \quad (4.11)$$

Na rozdiel od prípadu presného mapovania operátora počtu kvázičastíc teraz uvažujeme približné vyjadrenia  $\beta_B^\pm$ , pretože presné obrazy obsahujú v danom modeli veľmi veľký počet  $B^\dagger$ ,  $B$  operátorov. Konkrétny QRPA výpočet  $\beta$ -prechodov však ukázal, že nelineárne členy v rozvoji (4.10) sú zanedbateľné. Preto pre bozónový obraz  $\beta_B^-$  a  $\beta_B^+$  stačí písať

$$\beta_B^- = \sqrt{2\Omega}(u_p v_n B^\dagger + v_p u_n B), \quad \beta_B^+ = (\beta_B^-)^\dagger. \quad (4.12)$$

Amplitúdy  $\beta^-$  a  $\beta^+$ -prechodov medzi základným a susedným excitovaným stavom, t.j.  $\langle 0_1^+ | \beta_B^- | RPA \rangle$  a  $\langle 0_1^+ | \beta_B^+ | RPA \rangle$ , kde  $|0_1^+\rangle = Q^\dagger |RPA\rangle$ , vypočítame pomocou maticových elementov definovaných v dodatku C.1.

Obrázok 4.5: Amplitúda Fermiho  $\beta^-$  a  $\beta^+$  prechodu medzi základným  $|RPA\rangle$  a excitovaným  $|0_1^+\rangle$  stavom ako funkcia sily  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa'$ . Označenie uvedených riešení má rovnaký význam ako v grafe 4.3. -c3) je maticový element s opačnou fázou ako c3).



Hodnoty  $\beta^-$  a  $\beta^+$  amplitúd získané v rámci QRPA s optimálnym základným stavom, v QRPA s QBA, využitím diagonalizácie  $H_F$  a semiklasickým priblížením [R<sup>+</sup>00], sú zobrazené na grafoch 4.5 ako funkcie parametra  $p$ - $p$  interakcie. V prípade štandardnej QRPA metódy (QBA) vidíme prudký nárast  $\beta^-$  a prudký pokles  $\beta^+$  amplitúd v blízkosti kolapsu QRPA riešenia v bode  $\kappa'_c$ . Zaujímavé je rovnaké správanie sa obidvoch vetiev semiklasického riešenia v danej oblasti. Pri veľkej sile  $p$ - $p$  interakcie ( $\kappa' > \kappa'_c$ ) sú exaktné hodnoty  $\beta^-$  prechodov najlepšie reprezentované existujúcim a2) resp. novým c2) riešením. V prípade  $\beta^+$  prechodov a2) riešenie v oblasti  $\kappa' > \kappa'_c$  nedokáže kopírovať priebeh exaktného riešenia a klesá k nule. Je zaujímavé, že v okolí  $\kappa' = 1.5$  MeV sú exaktné  $\beta^+$  amplitúdy silne potlačené. Ale za daným bodom ich absolútna hodnota znovu narastá. Tento trend kvalitatívne opisuje -c3) mód. Je získaný z c3) hodnôt použitím opačnej fázy<sup>1</sup> a predstavuje zlepšenie oproti existujúcemu a2) (EPP-QRPA) riešeniu.

### Ikedovo sumačné pravidlo

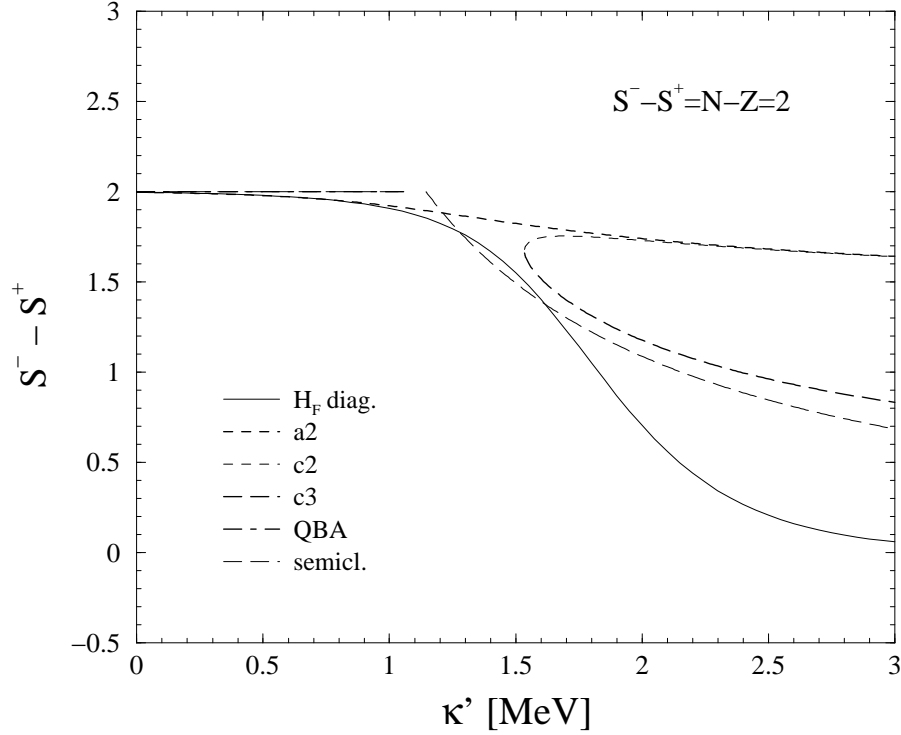
Na základe známych jednoduchých  $\beta^\pm$  amplitúd môžeme skonštruovať sily  $\beta^\pm$  prechodov ako štvorce daných amplitúd. Keďže v uvažovanom jednovrstvovom protón–neutrónovom Lipkinovom modeli máme len jeden QRPA vzbudený stav, pre celkové sily  $\beta^\pm$  prechodov  $S^-, S^+$  (t.j. súčet všetkých síl  $\beta$ -prechodov do úplnej sústavy vzbudených stavov) platí:

$$S^- = |\langle 0_1^+ | \beta_B^- | RPA \rangle|^2, \quad S^+ = |\langle 0_1^+ | \beta_B^+ | RPA \rangle|^2. \quad (4.13)$$

Veličiny  $S^-$  a  $S^+$  spĺňajú Ikedovo sumačné pravidlo:  $S^- - S^+ = N - Z$ , kde  $N$  ( $Z$ ) je počet neutrónov (protónov) v základnom stave  $|RPA\rangle$ .

<sup>1</sup>fáza maticového elementu môže byť ľubovoľná

Obrázok 4.6: Test Ikedovho sumačného pravidla pri meniacej sa hodnote  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa'$ .  $S^-$  a  $S^+$  sú celkové sily jednoduchých  $\beta^-$ , resp.  $\beta^+$  prechodov. Označenie riešení má rovnaký význam ako v grafe 4.3.



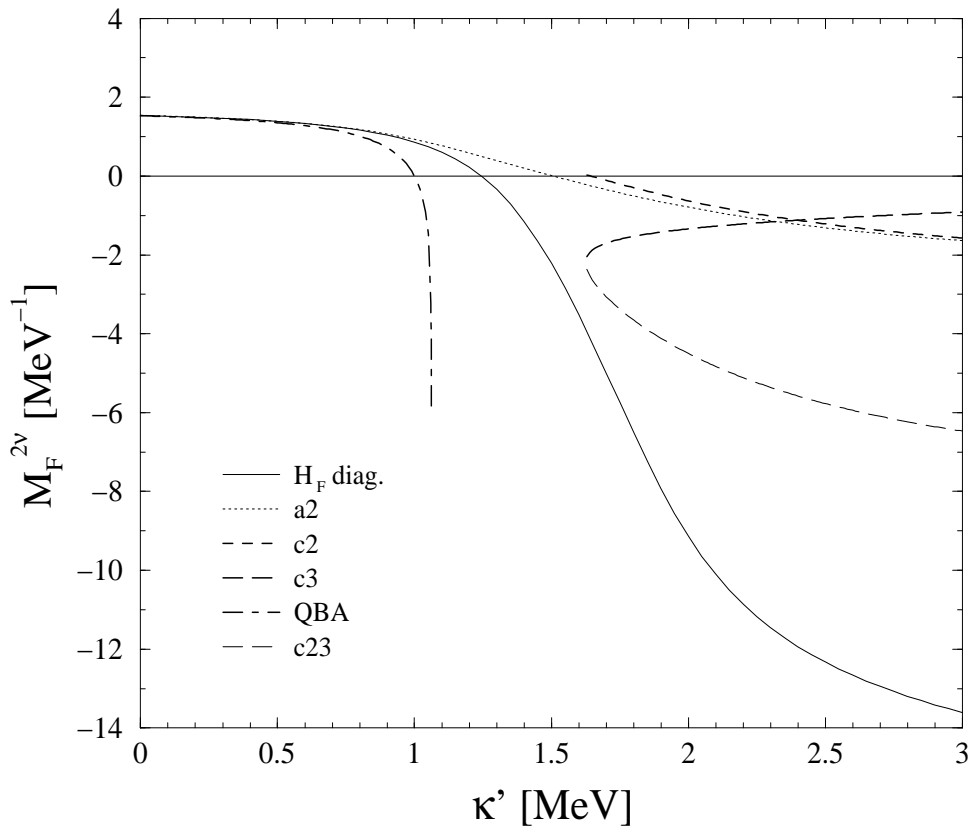
Je dobre známe, že štandardná QRPA metóda (QBA) automaticky spĺňa uvažované pravidlo [K<sup>+</sup>97; EVZ88]. Obrázok 4.6 ukazuje, že tento fakt platí aj v použitom schématickom modeli. Na grafe 4.6 sú ďalej nakreslené výsledky získané pomocou QRPA s optimálnym základným stavom, pomocou diagonalizácie  $H_F$  [rovnica (2.48)] a semiklasickým postupom. Ako už bolo uvedené v kapitole 2.3.2, exaktné hodnoty nespĺňajú Ikedovo sumačné pravidlo, v oblasti  $\kappa' > 1\text{MeV}$  sa začínajú výrazne líšiť od čísla  $N - Z$ . Predpokladá sa, že pôvod tohto javu je v zanedbaní tzv. rozptylových členov pri odvodení hamiltoniánu  $H_F$  [Š<sup>+</sup>00] (pozri časť 2.3.1). Z grafu 4.6 vyplýva, že a2) riešenie sa pri narastajúcej interakcii  $\kappa'$  mení len minimálne a spolu s c2) výsledkami najlepšie odpovedá teoretickej hodnote  $N - Z$ . Vzhľadom k predpovedi exaktných hodnôt pre  $\kappa' > 1\text{MeV}$  však a2) a c2) módy zlyhávajú. Podstatne lepší opis priebehu  $H_F$  *diag.* poskytuje nové riešenie c3) a to hlavne v oblasti svojho vzniku. Podobne je to aj v prípade semiklasického výsledku. Pri maximálnej  $p$ - $p$  interakcii ale pozorujeme značný rozdiel medzi c3) (semiklasickými) a exaktnými hodnotami. Predpokladáme, že prítomnosť neharmonických efektov vo vzbudenom stave exaktného riešenia, ktorá sa prejavuje pri veľkých hodnotách parametra  $p$ - $p$  interakcie, vplyva aj na veľkosť  $\beta$ -prechodov a veličín s nimi súvisiacich. Preto v týchto prípadoch registrujeme rozdiel medzi exaktným riešením (s neharmonickými efektami) a c3) výsledkami

(ktoré dobre súhlasia s harmonickým semiklasickým riešením) v oblasti veľkých síl  $p$ - $p$  interakcie.

### Maticový element $2\nu\beta\beta$ -rozpadu

Vlnové funkcie získané pomocou metódy *QRPA s optimálnym základným stavom* sme použili na výpočet  $2\nu\beta\beta$  Fermiho maticového elementu ( $M_F^{2\nu}$ ). V uva-

Obrázok 4.7: Fermiho maticový element  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu v závislosti od parametra  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa'$ . Označenia jednotlivých riešení sú vysvetlené pri grafe 4.3. Maticový element c23) bol získaný kombináciou jednoduchých  $\beta$ -prechodov c2) a c3) [viď text]. Parametre modelového priestoru sú totožné s tými, ktoré boli použité pri konštrukcii grafu 2.5.



žovanom schématickom modeli, formulovanom v bozónovej reprezentácii, platí pre  $M_F^{2\nu}$  vzťah (2.63), v ktorom základný stav  $|RPA\rangle$  je daný rovnicou (4.3) a  $\beta^\pm$  prechodové operátory sú definované v (4.12). Pre výpočet maticového elementu  $M_F^{2\nu}$  bol použitý jadrový prechod ( $N = 14, Z = 6$ )  $\rightarrow$  ( $N = 12, Z = 8$ ) a nasledujúce modelové parametre:  $j = 19/2$ ,  $\chi' = 0.5\text{MeV}$ ,  $\epsilon = 1\text{MeV}$  a  $\Delta = 0.5\text{MeV}$ .

Hodnoty  $M_F^{2\nu}$  odpovedajúce novým riešeniam a), c) (QRPA s optimálnym základným stavom) sú zobrazené na grafe 4.7 spolu s maticovými elementami získanými pomocou štandardnej QRPA metódy a  $H_F$  diagonalizácie<sup>2</sup>. a2) riešenie

<sup>2</sup>berie sa do úvahy len príspevok od najnižšieho prechodového stavu ( $A, Z+1$ )

existujúce na celom intervale hodnôt  $\kappa'$ , ktoré je takmer zhodné s EPP-QRPA riešením [prezentovaným v kapitole 2.3.2], je vďaka presnému zahrnutiu Pauliho princípu v teórii málo citlivé na zmenu  $p$ - $p$  interakcie v porovnaní so štandardným QRPA priblížením. Exaktné riešenie po prechode nulou v okolí  $\kappa' \approx 1.25\text{MeV}$  klesá do veľkých záporných hodnôt. Takéto asymptotické správanie nepredpovedá ani jeden z nových módov. Priebeh podobný exaktnému však môžeme dostať, ak uvážime najlepšie výsledky pre jednoduché  $\beta$  amplitúdy. Týmto spôsobom je vytvorené c23) riešenie ako kombinácia c2) hodnôt pre  $\beta^-$  amplitúdu [ $\langle 0_1^+ | \beta_B^- | RPA \rangle$ ] a c3) hodnôt pre  $\beta^+$  amplitúdu [ $\langle 0_1^+ | \beta_B^+ | RPA \rangle$ ]. Nové riešenie c23) získané v oblasti zmenenej štruktúry základného stavu mnohonukleónového systému ( $\kappa' > \kappa'_c$ ), predstavuje dosiaľ najlepší opis exaktných Fermiho maticových elementov  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu pre veľké hodnoty  $\kappa'$ .

Najdôležitejšie výsledky tejto kapitoly môžeme zhrnúť do nasledujúcich bodov:

- (i) Vytvorili sme novú metódu *QRPA s optimálnym základným stavom*. Jej dôležitou črtou je nový predpis pre vlnovú funkciu  $|RPA\rangle$  s doplnkovým stupňom voľnosti. Nová definícia QRPA vákua umožňuje súčasne riešiť QRPA rovnice a optimalizovať základný stav  $|RPA\rangle$  pomocou minimalizácie strednej hodnoty hamiltoniánu v tomto stave. Uvedený postup umožnil opísať zmenu štruktúry základného stavu mnohonukleónového systému pri narastajúcej sile časticovo-časticovej interakcie, v súvislosti s kolapsom štandardnej QRPA metódy.
- (ii) Presné uvažovanie Pauliho vylučovacieho princípu v rámci novej metódy zabráňuje kolapsu QRPA riešení a tak umožňuje počítať predmetné veličiny aj v oblasti veľkých hodnôt  $p$ - $p$  interakcie.
- (iii) V rámci použitého schématického modelu bol vytvorený neiteračný postup riešenia nelineárneho QRPA problému, čo zabezpečilo nájsť všetky možné výsledky pre daný jadrový systém.
- (iv) Boli nájdené nové kolektívne módy mnohonukleónového systému, ktoré súvisia s doplnkovým stupňom voľnosti v QRPA vlnovej funkcii a s vyššími nelineárnymi členmi v bozónovej expanzii modelového hamiltoniánu. Tieto riešenia vznikajú v oblasti za kritickou hodnotou  $p$ - $p$  interakcie, určenou kolapsom štandardnej QRPA metódy. Jeden z nových módov [c2)] vykazuje podobné správanie ako EPP-QRPA riešenie [Š<sup>+</sup>00], zatiaľ čo druhý [c3)] sa pri všetkých počítaných veličinách dobre zhoduje s riešením získaným v semiklasickom priblížení [R<sup>+</sup>00] a vynikajúco reprodukuje presné hodnoty energie základného stavu.
- (v) Kvalitu vytvorených vlnových funkcií základného a vzbuđeného stavu sme testovali vo výpočtoch stredného počtu kvázičastíc v príslušných stavoch. Porovnanie získaných výsledkov s presnými hodnotami ukázalo na veľmi dobrý opis základného stavu v prezentovanej QRPA metóde a na prítomnosť neharmonických efektov v exaktnom vzbuđenom stave. Tie spôsobujú značný

rozdiel medzi presným a nami predpovedaným počtom kvázičastíc vo vzbudenom stave. QRPA s optimálnym základným stavom sme následne aplikovali na výpočet jednoduchých a dvojitých  $\beta$ -prechodov. Pre Fermiho maticový element  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu sa v oblasti veľkej sily  $p$ - $p$  interakcie dosiahli podstatne lepšie výsledky ako poskytuje EPP-QRPA metóda.

### 4.1.3 Diskusia

V rámci schématických štúdií o úlohe Pauliho vylučovacieho princípu v QRPA [Š<sup>+</sup>00] bol vytvorený model EPP-QRPA, ktorý spĺňa daný princíp presne. Metóda EPP-QRPA poskytuje výrazne lepšie výsledky pre jednoduché a dvojité  $\beta$ -prechody ako dosiaľ používané priblíženia (štandardná QRPA, RQRPA). Nie je však postačujúca na opis jadrového systému pri veľkých hodnotách časticovo-časticovej ( $p$ - $p$ ) interakcie medzi nukleónmi. Rozdiel EPP-QRPA a exaktných výsledkov v tejto oblasti  $p$ - $p$  síl spočíva už v nedokonalom určení základného stavu  $|RPA\rangle$ , ktorý je daný len QRPA podmienkou  $Q|RPA\rangle = 0$ . Napriek jej presnému riešeniu a určení vlnovej funkcie  $|RPA\rangle$ , uvedený prístup sa javí ako neúplný, neumožňuje uvažovať zmeny v štruktúre mnohonukleónového systému pri narastajúcej sile  $p$ - $p$  interakcie.

V tejto kapitole sme v schématickom protón-neutrónovom Lipkinovom modeli [HHC96; CHH97] prezentovali novú mnohonukleónovú metódu na výpočet vzbudených stavov jadra: **QRPA s optimálnym základným stavom** (QRPA-OGS). QRPA-OGS vychádza z poznatkov získaných v semiklasickom opise kolektívnych jadrových excitácií [R<sup>+</sup>00], v ktorom je kolaps QRPA riešenia interpretovaný ako fázový prechod mnohonukleónového systému zo sféricky symetrického do deformovaného stavu. Prezentovaná QRPA metóda využíva tiež prednosti EPP-QRPA modifikácie založené na presnom splnení Pauliho vylučovacieho princípu. V QRPA-OGS je navrhnutá nová definícia vlnovej funkcie  $|RPA\rangle$ . Táto je určená variačne a umožňuje opísať zmenu štruktúry základného stavu sústavy nukleónov pri určitej (kritickej) sile reziduálnej  $p$ - $p$  interakcie. Konkrétnym prejavom tohto postupu v rámci QRPA-OGS je vznik nových kolektívnych módov  $[c1, c2, c3]$  opisovaného jadrového systému v oblasti veľkých hodnôt  $p$ - $p$  interakcie. Pre nové riešenia je typické, že sú späté so spontánnym narušením symetrie, t.j. minimá ich energií základného stavu nie sú situované v počiatku príslušnej sústavy súradníc.

Podrobné štúdium prezentovanej metódy a jej aplikácia vo výpočtoch jednoduchých a dvojitých  $\beta$ -prechodov potvrdili, že variačné určenie vlnovej funkcie  $|RPA\rangle$  poskytuje precízny opis základného stavu systému pri veľkých hodnotách  $p$ - $p$  interakcie, ktorý dosiaľ v QRPA výpočtoch nebol uspokojivý. Dobre definovaný základný stav má vplyv aj na lepší opis vzbudeného stavu v porovnaní s EPP-QRPA priblížením. Pozorované rozdiely medzi najlepším novým módom  $[c3]$  a presnými hodnotami ako pri koreláciách v excitovanom stave tak aj v  $\beta$  a  $\beta\beta$ -prechodoch naznačujú, že prítomnosť neharmonických efektov v exaktnom vzbudenom stave systému hrá dôležitú úlohu a to hlavne pri veľkých hodnotách parametra  $p$ - $p$  interakcie za kolapsom štandardnej QRPA metódy.

Nové riešenia nájdené v oblasti veľkých síl  $p$ - $p$  interakcie vo väčšine prípadov poskytujú lepší opis exaktných hodnôt daných veličín ako existujúce EPP-QRPA predpovede. Na záver treba poznamenať, že QRPA s optimálnym základným stavom prináša nový prístup v určení vlnovej funkcie  $|RPA\rangle$  a reprezentuje jeden z mála úspešných pokusov v hľadaní kolektívnych módov mnohonukleónových systémov pre veľké hodnoty sily  $p$ - $p$  interakcie.

## 4.2 QRPA s nelineárnym fonónovým operátorom

Spoločnou črtou všetkých doteraz vytvorených a používaných QRPA priblížení je lineárna štruktúra excitačného fonónového operátora (pozri vzťahy (2.29), (2.54)), pomocou ktorého sa budujú príslušné vzbudené stavy jadra. Je opodstatnený predpoklad, že komplikovanejší tvar daného operátora môže zabezpečiť lepší opis kolektívnych excitácií mnohonukleónového systému. Takáto možnosť modifikácie QRPA modelu sa ponúka aj v súvislosti s EPP-QRPA a QRPA-OGS výsledkami uvedenými v predchádzajúcich kapitolách 2.3.2 a 4.1.2. V oboch modeloch totiž pozorujeme odlišnosť vypočítaných veličín, ktoré súvisia so vzbudeným jadrovým stavom, od presných hodnôt daných diagonalizáciou hamiltoniánu. Pripomeňme, že jedným zo záverov pri QRPA-OGS štúdiách bolo, že na úplný opis vzbudeného stavu je potrebné uvažovať aj neharmonické kolektívne vibrácie jadrového systému, čo môže byť docielené zahrnutím vhodných nelineárnych členov do QRPA fonónového operátora.

Treba povedať, že myšlienka použitia nelineárnej štruktúry fonónového operátora na opis vzbudených stavov nie je celkom nová. V knihe [Row70] je navrhnutý zložitejší (nelineárny) tvar excitačného operátora v rámci QRPA. Ide o umelo zavedenú kombináciu 1- a 2-fonónových vzbudení:  $a Q^\dagger + b Q^\dagger Q^\dagger$ , kde  $Q^\dagger$  je bežne používaný lineárny QRPA fonónový operátor. Tento postup bol nedávno použitý na opis nízkoležiacich dvojfonónových stavov párnopárnych jadier [DS03], avšak bez uspokojivej zhody s experimentálnymi dátami. Inú formu nelineárneho fonónového operátora použili vo svojej práci Sambataro a Suhonen [SS98], konkrétne:  $Q^\dagger = Xb^\dagger - Yb + Zb^\dagger b^\dagger b - Wb^\dagger b b$ .  $X, Y, Z, W$  sú variačné amplitúdy a  $b^\dagger$  ( $b$ ) je kreačný (anihilačný) bozónový operátor. Schématické výpočty prevádzajú v bozónovom priestore a sú obmedzené len na určenie energií základného a vzbudeného stavu ich minimalizáciou (teda nejde o QRPA model a výpočty). Otázka novej a lepšej konštrukcie excitačných fonónových operátorov je preto stále otvorená a aktuálna. Úzko súvisí aj s potrebou presnejšieho opisu dvojfonónových vzbudení, pričom motiváciou danej úlohy je exkluzívny výpočet dvojitých  $\beta$ -prechodov do excitovaných koncových stavov jadra s dvojfonónovou štruktúrou (dosiaľ realizovaný len veľmi približne [GV92; CS94b; Š<sup>+</sup>01]).

V tejto kapitole predkladáme QRPA a TDA modifikácie, v ktorých sú použité nové nelineárne vyjadrenia excitačných fonónových operátorov. Nové QRPA a TDA metódy sú aplikované v protón-neutrónovom Lipkinovom modeli. Pri hľadaní správnej štruktúry daných operátorov sme nevhodné tvary identifikovali a

vylučovali na základe nesúlady vypočítaných excitačných energií s presnými hodnotami. Ako bude ďalej ukázané, pomocou vhodnej nelineárnej štruktúry QRPA, respektíve TDA fonónového operátora, je možné reprodukovať v danom modeli exaktné spektrum vzbuđených stavov (a teda aj dvojfónové stavy) jadra získané diagonalizáciou hamiltoniánu.

### 4.2.1 QRPA a reprodukcia nepárnych vzbuđených stavov

V úvode kapitoly 4.2 sme spomenuli, že formalizmus QRPA s nelineárnym fonónovým operátorom budujeme v protón–neutrónovom Lipkinovom modeli (2.48). Vzbuđený stav jadra  $(A, Z \pm 1)$  bol dosiaľ konštruovaný pôsobením operátora  $Q^\dagger = XA^\dagger - YA$  na základný stav  $|rpa\rangle$  systému  $(A, Z)$ . Excitáciu toho istého jadra  $(A, Z \pm 1)$  dosiahneme aj pomocou operátorov  $AA^\dagger A^\dagger$ ,  $AAA^\dagger$ , pretože rozdiel medzi kreačnými a anihilačnými bifermiónovými operátormi je  $\pm 1$ . Takto môžeme pokračovať a pridávať ďalšie členy  $(AAA^\dagger A^\dagger A^\dagger, AAAA^\dagger A^\dagger, \dots)$  tak, aby bol zachovaný daný rozdiel  $A^\dagger$  a  $A$  operátorov.

Na základe predostrenej schémy uvažujeme najjednoduchší nelineárny tvar<sup>3</sup>  $Q^\dagger$ :

$$Q^\dagger = X_1 A^\dagger - Y_1 A + X_3 AA^\dagger A^\dagger - Y_3 AAA^\dagger. \quad (4.14)$$

Variačné amplitúdy  $X, Y$  označujeme nepárnymi indexami. Z nasledujúcich výpočtov totiž vyplynie, že fonónový operátor (4.14) dokáže spoločne opísať prvé dva nepárne vzbužené stavy systému  $(A, Z \pm 1)$ . Novú QRPA modifikáciu budujeme s presným zachovaním Pauliho princípu, t.j. limitný prípad  $X_3 = 0, Y_3 = 0$  vedie na EPP-QRPA metódu z kapitoly 2.3.2.

Presné riešenie podmienky  $Q|rpa\rangle = 0$  s použitím operátora (4.14) predstavuje základný stav:

$$|rpa\rangle = \mathcal{N} \sum_{n=0}^{\Omega} \alpha_n (A^\dagger)^{2n} |0\rangle, \quad (4.15)$$

kde

$$\alpha_n = \frac{Y_1 m_{2n-1} + Y_3 m_{2n}}{X_1 m_{2n} + X_3 m_{2n+1}} \alpha_{n-1}, \quad \mathcal{N}^{-2} = \sum_{n=0}^{\Omega} \alpha_n^2 m_{2n}, \quad (4.16)$$

a  $|0\rangle$  je vákuum pre operátory  $A^\dagger, A$ . Maticový element  $m_n = \langle 0|A^n (A^\dagger)^n |0\rangle$  je definovaný v (2.53). Štandardným postupom uvedeným v kapitole 2.2.2 odvodíme modelové QRPA rovnice. Pre tvar (4.14) fonónového operátora dostávame:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = E_{RPA} \begin{pmatrix} \mathcal{U} & \mathcal{V} \\ -\mathcal{V} & -\mathcal{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

$X, Y$  sú v tomto prípade dvojkomponentné vektory so zložkami  $(X_1, X_3), (Y_1, Y_3)$ . Elementy submatic  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  hamiltonovej matice  $\mathcal{H}$  na ľavej strane rovnosti (4.17)

<sup>3</sup>porovnaj s vyššie uvedeným operátorom definovaným Sambatarom a Suhonenom [SS98]



majú nasledovné definície:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{11} &= \langle rpa|[A, H, A^\dagger]|rpa\rangle, & \mathcal{A}_{22} &= \langle rpa|[AAA^\dagger, H, AA^\dagger A^\dagger]|rpa\rangle, \\
\mathcal{A}_{12} &= \mathcal{A}_{21} = \langle rpa|[A, H, AA^\dagger A^\dagger]|rpa\rangle, \\
\mathcal{B}_{11} &= -\langle rpa|[A, H, A]|rpa\rangle, & \mathcal{B}_{22} &= -\langle rpa|[AAA^\dagger, H, AAA^\dagger]|rpa\rangle, \\
\mathcal{B}_{12} &= \mathcal{B}_{21} = -\langle rpa|[A, H, AAA^\dagger]|rpa\rangle.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Submatice  $\mathcal{U}$  a  $\mathcal{V}$  normovacej QRPA matice  $\mathbf{N}$  na pravej strane rovnosti (4.17) sú:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{11} &= \langle rpa|[A, A^\dagger]|rpa\rangle, & \mathcal{U}_{22} &= \langle rpa|[AAA^\dagger, AA^\dagger A^\dagger]|rpa\rangle, \\
\mathcal{U}_{12} &= \mathcal{U}_{21} = \langle rpa|[A, AA^\dagger A^\dagger]|rpa\rangle, \\
\mathcal{V}_{12} &= -\mathcal{V}_{21} = -\langle rpa|[A, AAA^\dagger]|rpa\rangle, & \mathcal{V}_{11} &= \mathcal{V}_{22} = 0.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Explicitné vyjadrenia maticových elementov (4.18) a (4.19) (s presným výpočtom predmetných komutátorov) sú uvedené v dodatku C.2. Samotné riešenie QRPA systému (4.17) vyžaduje prepísať dané rovnice na tvar s typickou QRPA normou na pravej strane. Pre tento účel najskôr diagonalizujeme normovaciú maticu  $\mathbf{N}$ :  $\mathbf{N}\mathbf{D} = \mathbf{l}\mathbf{D}$ , pričom  $\mathbf{D}$  sú vlastné vektory a získané vlastné hodnoty  $l_i$ , ( $i = 1, \dots, 4$ ) spĺňajú podmienku  $l_1 = -l_3$ ,  $l_2 = -l_4$ ,  $l_1, l_2 > 0$ . Normu  $\mathbf{N}$  môžeme následne rozložiť:

$$\mathbf{N} = \mathbf{D}\mathbf{L}^{1/2} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \mathbf{L}^{1/2}\mathbf{D}^{-1}. \tag{4.20}$$

V zápise (4.20)  $\mathbf{1}$  reprezentuje  $2 \times 2$  jednotkovú maticu, ktorá je súčasťou typickej QRPA normy s nulovými nediagonálnymi členmi a

$$\mathbf{L}^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{l_1} & \dots & 0 \\ & \sqrt{l_2} & \vdots \\ \vdots & & \sqrt{l_1} \\ 0 & \dots & & \sqrt{l_2} \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

Prevedením transformácie hamiltonovej matice  $\mathcal{H}$  a QRPA vlastných vektorov  $X, Y$ :

$$\overline{\mathcal{H}} = \mathbf{L}^{-1/2}\mathbf{D}^{-1} \mathcal{H} \mathbf{D}\mathbf{L}^{-1/2}, \quad \begin{pmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \end{pmatrix} = \mathbf{L}^{1/2}\mathbf{D}^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \tag{4.22}$$

dostávame štandardný tvar QRPA rovnice

$$\begin{pmatrix} \overline{\mathcal{A}} & \overline{\mathcal{B}} \\ \overline{\mathcal{B}} & \overline{\mathcal{A}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \end{pmatrix} = E_{RPA} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \end{pmatrix}, \tag{4.23}$$

ktorú riešime diagonalizačným postupom načrtnutým v [RS80]. Z definície QRPA základného stavu  $|rpa\rangle$  vo vzťahoch (4.15), (4.16) vyplýva, že elementy  $\overline{\mathcal{A}}$ ,  $\overline{\mathcal{B}}$  matic sú funkcie amplitúd  $\overline{X}$ ,  $\overline{Y}$ . Preto numerické riešenia QRPA s nelineárnym fonónovým operátorom (EPP-QRPA n.l.o.) získavame iteračne. V porovnaní s QRPA

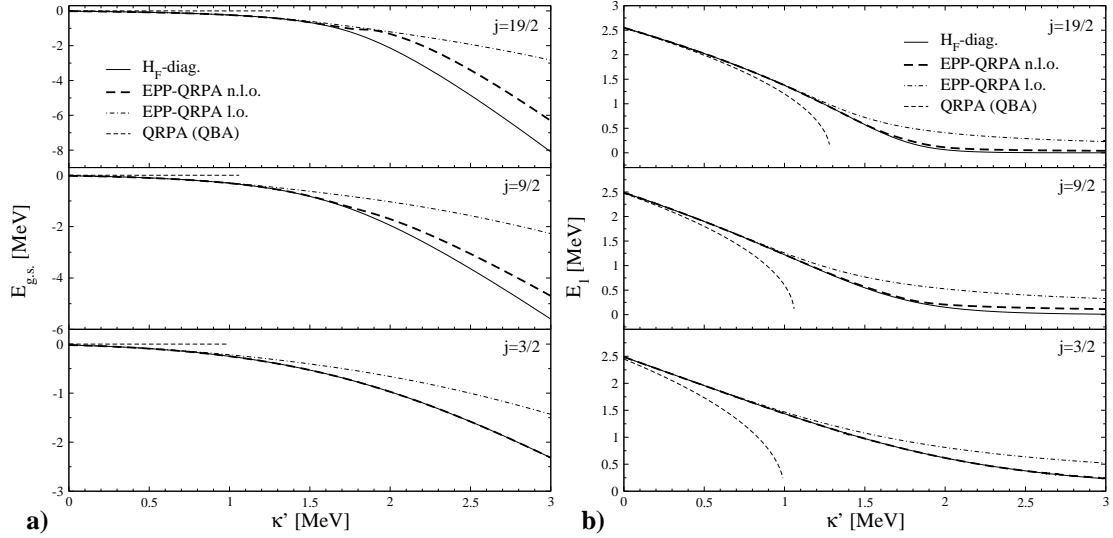
výpočtami s lineárnym fonónovým operátorom tu nastáva nová situácia, keď diagonalizáciou rovnice (4.23) dostávame v každej iterácii dve sady  $\overline{X}$ ,  $\overline{Y}$  amplitúd. Tieto prislúchajú dvom rôznym QRPA energiám. Pre nasledovnú iteráciu preto vyberáme tie vektory  $\overline{X}$ ,  $\overline{Y}$ , ktoré produkujú menšiu hodnotu energie základného stavu  $\langle rpa|H_F|rpa\rangle$ .

Zaujímavá je otázka interpretácie druhej QRPA energie získanej riešením systému (4.23). Pripomeňme, že QRPA s lineárnym fonónovým operátorom (QRPA l.o.) produkuje len jednu hodnotu energie a opisuje prvý vzбудený stav mnohonukleónového systému. V prípade EPP-QRPA l.o. sme zistili, že v modelovom priestore s momentom hybnosti nukleónov  $j = 1/2$  je vypočítaný prvý excitovaný stav identický s exaktnou vlnovou funkciou danou diagonalizáciou hamiltoniánu  $H_F$  (2.48). Exaktná vlnová funkcia nepárneho (párneho) vzбудeného stavu pritom obsahuje komponenty úmerné  $(A^\dagger)^n$ , kde  $n$ -je nepárne (párne),  $n \leq 2j + 1 = 2\Omega$ . Pre  $j = 1/2$  sú možné len dva excitované stavy a prvý vzбудený stav má vlnovú funkciu  $A^\dagger|0\rangle$ . Časti matíc  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{U}$ , ako aj celá matica  $\mathcal{V}$ , ktoré vyplývajú z nelineárnych členov fonónového operátora (4.14), v tomto modeli neprispievajú do celkovej hamiltonovej a normovacej matice v QRPA rovnici. Preto sú realizovateľné len QRPA l.o. výpočty.

Odlíšná situácia nastáva v prípade modelu s  $j = 3/2$ . V ňom sú možné štyri vzбудené stavy, pričom vlnová funkcia prvého a tretieho excitovaného stavu má tvar  $(aA^\dagger + b(A^\dagger)^3)|0\rangle$ . Riešením EPP-QRPA n.l.o. rovníc (4.23) získame dve energie, ktoré sa zhodujú s exaktnými vlastnými hodnotami prvého a tretieho vzбудeného stavu z diagonalizácie hamiltoniánu. Dve rôzne sady vypočítaných QRPA amplitúd pritom súčasne definujú ten istý základný stav  $|rpa\rangle$  v rovnici (4.15) a spĺňajú podmienku  $Q|rpa\rangle = 0$ . Získané závislosti energie základného stavu ( $E_{g.s.}$ ), prvého a tretieho vzбудeného stavu ( $E_1$ ,  $E_3$ ) od parametra zvyškovej časticovo-časticovej ( $p$ - $p$ ) interakcie  $\kappa'$  medzi nukleónmi sú nakreslené na obrázkoch 4.8, 4.9. Vplyv nelineárnych členov fonónového operátora (4.14) na hodnoty predpovedaných energií je demonštrovaný výsledkami v modeloch s momentami hybnosti nukleónov (počtom nukleónov)  $j = 3/2$  ( $N = 2, Z = 2$ ),  $j = 9/2$  ( $N = 6, Z = 4$ ) a  $j = 19/2$  ( $N = 14, Z = 6$ ), s energiou kvázičastíc  $\epsilon = 1\text{MeV}$  a s reziduálnou časticovo-dierovou interakciou  $\chi' = 0.5\text{MeV}$ . Pre porovnanie uvádzame v grafoch exaktné energie a v prípade obrázkov 4.8 aj EPP-QRPA l.o. a štandardné QRPA hodnoty. Okrem toho, že nelineárny tvar (4.14) QRPA fonónového operátora zabezpečuje presnú reprodukciu exaktných hodnôt energií  $E_{g.s.}$ ,  $E_1$  a  $E_3$  v modeli  $j = 3/2$ , pozitívne ovplyvňuje aj QRPA výsledky v modeloch s väčším momentom hybnosti  $j$  a počtom nukleónov. Porovnanie EPP-QRPA n.l.o. s pôvodnou „lineárnou“ metódou (EPP-QRPA l.o.) ukazuje, že aj najjednoduchšia nelinearita zahrnutá vo fonónovom operátore spôsobuje výrazné posunutie výsledkov pre  $E_{g.s.}$  a  $E_1$  bližšie k exaktným hodnotám. V prípade energie  $E_3$  (obrázok 4.9) je použitie operátora (4.14) na QRPA opis presných hodnôt v oblasti veľkej reziduálnej  $p$ - $p$  sily v modeloch s  $j = 9/2$  a  $j = 19/2$  (t.j. v modeloch s väčším počtom nukleónov) nedostačujúce.

Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že ak chceme presne reprodukovať vlast-

Obrázok 4.8: Energia základného (a) a prvého vzbuđeného stavu (b) jadrového systému ako funkcia parametra  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa'$  v troch modeloch s rôznymi uhlovými momentami  $j$ .  $H_F$ -diag. sú exaktné hodnoty získané diagonalizáciou  $H_F$  (2.48),  $EPP$ -QRPA n.l.o. sú QRPA riešenia s nelineárnym fonónovým operátorom (4.14),  $EPP$ -QRPA l.o. sú energie vypočítané v  $EPP$ -QRPA s lineárnym fonónovým operátorom a QRPA (QBA) sú štandardné QRPA hodnoty (s použitím QBA).



né hodnoty hamiltoniánu súvisiace s nepárnyimi vzbuđenými stavmi v modeloch s uhlovým momentom  $j > 3/2$ , potrebujeme dodať vyššie nelineárne členy do operátora (4.14). Na základe získaných poznatkov preto všeobecne definujeme nelineárny QRPA fonónový operátor opisujúci nepárne excitácie systému ( $A, Z \pm 1$ ) nasledovne:

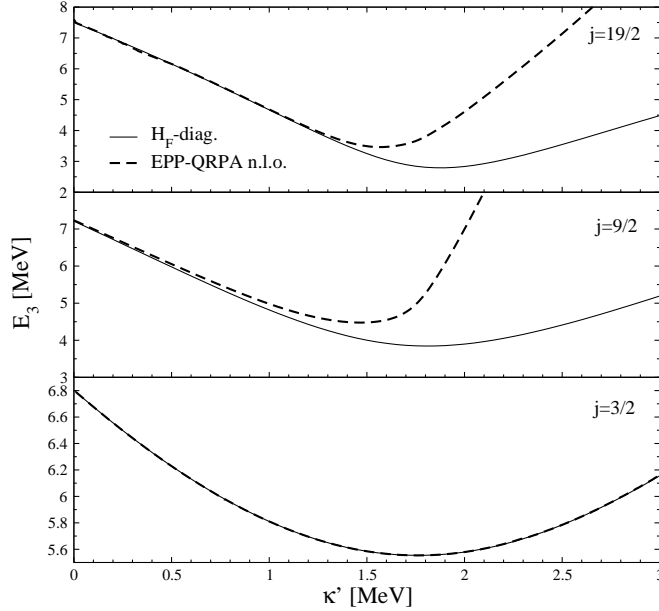
$$Q^{\dagger(i)} = \sum_{k=1}^n \left( X_{2k-1}^{(i)} A^{k-1} (A^\dagger)^k - X_{2k-1}^{(i)} A^k (A^\dagger)^{k-1} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.24)$$

Index  $n$  vyjadruje stupeň nelinearity operátora  $Q^\dagger$  a  $i$  označuje všetky QRPA riešenia pre daný nelineárny tvar  $Q^\dagger$ . Niekoľko prvých členov rozvoja (4.24) je uvedených v tabuľke 4.2. Ku konkrétnemu tvaru fonónového operátora je uvedené číslo vzbuđeného stavu, ktorý opisuje a údaj o modeli, v ktorom príslušné vyjadrenie operátora  $Q^\dagger$  zabezpečuje presnú QRPA reprodukciu exaktných výsledkov. Z tabuľky 4.2 vyplýva, že napríklad so štruktúrou operátora

$$Q^\dagger = X_1 A^\dagger - Y_1 A + X_3 A A^\dagger A^\dagger - Y_3 A A A^\dagger + X_5 A A A^\dagger A^\dagger A^\dagger - Y_5 A A A A^\dagger A^\dagger. \quad (4.25)$$

dokážeme QRPA výpočtami reprodukovat' 1., 3. a 5. exaktný vzbuđený stav v modeli s momentom hybnosti nukleónov  $j = 5/2$ .

Obrázok 4.9: Energia tretieho vzbuđeného stavu v závislosti od  $p$ - $p$  sily  $\kappa'$  počítaná v modeloch s momentami hybnosti nukleónov  $j = 3/2$ ,  $j = 9/2$ ,  $j = 19/2$ . Označenie jednotlivých riešení je vysvetlené pri obrázku 4.8.



Vráťme sa znovu k EPP-QRPA n.l.o. metóde s tvarom fonónového operátora (4.14) a študujme vplyv zahrnutých nelineárnych členov na výpočtoch ďalších veličín. Použijeme pritom zaužívaný model  $j = 9/2$ , ( $N = 6$ ,  $Z = 4$ ),  $\epsilon = 1\text{MeV}$  a  $\chi' = 0.5\text{MeV}$ . Získané QRPA vlnové funkcie základného a prvého vzbuđeného stavu otestujeme vo výpočte prekrytia daných stavov s exaktnými vlnovými funkciami a tiež v určení stredného počtu kvázičastíc v základnom a prvom excitovanom stave. Na grafe 4.10 sú zobrazené prekrytia EPP-QRPA n.l.o. a exaktnej vlnovej funkcie pre základný ( $\langle rpa | g.s. exact \rangle$ ) a prvý vzbuđený stav ( $\langle rpa | Q^{(1)} | 1. exact \rangle$ ). Upresníme, že základný stav  $|rpa\rangle$  je definovaný rovnicami (4.15), (4.16) a  $Q^{(1)}$  je fonónový operátor (4.14) so sadou QRPA amplitúd prislúchajúcich prvému vzbuđenému stavu. Explicitné vyjadrenia prvých dvoch vlastných funkcií hamiltoniánu  $H_F$  (2.48) sú:

$$|g.s. exact\rangle = \sum_{n=0}^{\Omega} C_{2n}^{\lambda=1} \frac{(A^\dagger)^{2n}}{\sqrt{m_{2n}}} |0\rangle, \quad |1. exact\rangle = \sum_{n=0}^{\Omega-1} C_{2n+1}^{\lambda=2} \frac{(A^\dagger)^{2n+1}}{\sqrt{m_{2n+1}}} |0\rangle, \quad (4.26)$$

kde  $C_n^\lambda$  je  $n$ -tá komponenta vlastného vektora operátora  $H_F$  s poradovým číslom  $\lambda$ . Pre porovnanie sú v obrázkoch 4.10 zakreslené aj prekrytia exaktných stavov s vlnovými funkciami vypočítanými v EPP-QRPA l.o. a v štandardnej QRPA metóde. Vidíme, že nová prezentovaná metóda (EPP-QRPA n.l.o.) poskytuje najlepšie vlnové funkcie ako pre základný, tak aj pre 1. vzbuđený stav. V oboch prípadoch faktor prekrytia s exaktnými stavmi nie je menší ako 0.95 na celom intervale uvažovaných hodnôt  $\kappa'$ . Takýto súčasný kvalitný výpočet uvažovaných

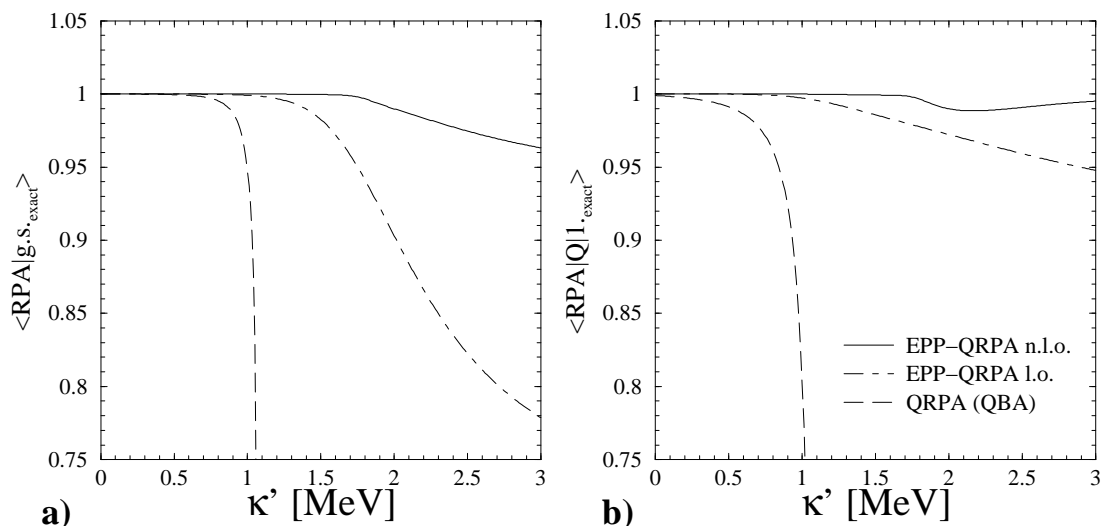
Tabuľka 4.2: Budovanie nelineárnych členov QRPA fonónového operátora  $Q^\dagger$ . Index  $n$  označuje tvar (stupeň nelinearity) operátora  $Q^\dagger$  a udáva tiež počet vzbudených stavov (QRPA riešení). Písmeno  $i$  v zápise  $Q^{\dagger(i)}$  čísluje konkrétny fonónový operátor prislúchajúci danému QRPA riešeniu. Fyzikálny význam uvažovaného tvaru  $Q^{\dagger(i)}$  je určený vzbudeným stavom, ktorý tento opisuje a modelom v ktorom poskytuje presné výsledky.

$n$	tvar QRPA fonónového operátora	opisovaný vzbudený stav	presný opis v modeli
1	$Q^{\dagger(1)} = X_1^{(1)} A^\dagger - Y_1^{(1)} A$	1.	$j = 1/2$
2	$Q^{\dagger(1)} = X_1^{(1)} A^\dagger - Y_1^{(1)} A +$ $X_3^{(1)} AA^\dagger A^\dagger - Y_3^{(1)} AAA^\dagger$	1.	$j = 3/2$
2	$Q^{\dagger(2)} = X_1^{(2)} A^\dagger - Y_1^{(2)} A +$ $X_3^{(2)} AA^\dagger A^\dagger - Y_3^{(2)} AAA^\dagger$	3.	$j = 3/2$
3	$Q^{\dagger(1)} = X_1^{(1)} A^\dagger - Y_1^{(1)} A +$ $X_3^{(1)} AA^\dagger A^\dagger - Y_3^{(1)} AAA^\dagger +$ $X_5^{(1)} AAA^\dagger A^\dagger A^\dagger - Y_5^{(1)} AAAA^\dagger A^\dagger$	1.	$j = 5/2$
3	$Q^{\dagger(2)} = X_1^{(2)} A^\dagger - Y_1^{(2)} A +$ $X_3^{(2)} AA^\dagger A^\dagger - Y_3^{(2)} AAA^\dagger +$ $X_5^{(2)} AAA^\dagger A^\dagger A^\dagger - Y_5^{(2)} AAAA^\dagger A^\dagger$	3.	$j = 5/2$
3	$Q^{\dagger(3)} = X_1^{(3)} A^\dagger - Y_1^{(3)} A +$ $X_3^{(3)} AA^\dagger A^\dagger - Y_3^{(3)} AAA^\dagger +$ $X_5^{(3)} AAA^\dagger A^\dagger A^\dagger - Y_5^{(3)} AAAA^\dagger A^\dagger$	5.	$j = 5/2$
...	...	...	...
$n$	$Q^{\dagger(1)} = \dots$	1.	$j = (2n-1)/2$
...	...	...	...
$n$	$Q^{\dagger(n)} = \dots$	$(2n-1)$ .	$j = (2n-1)/2$

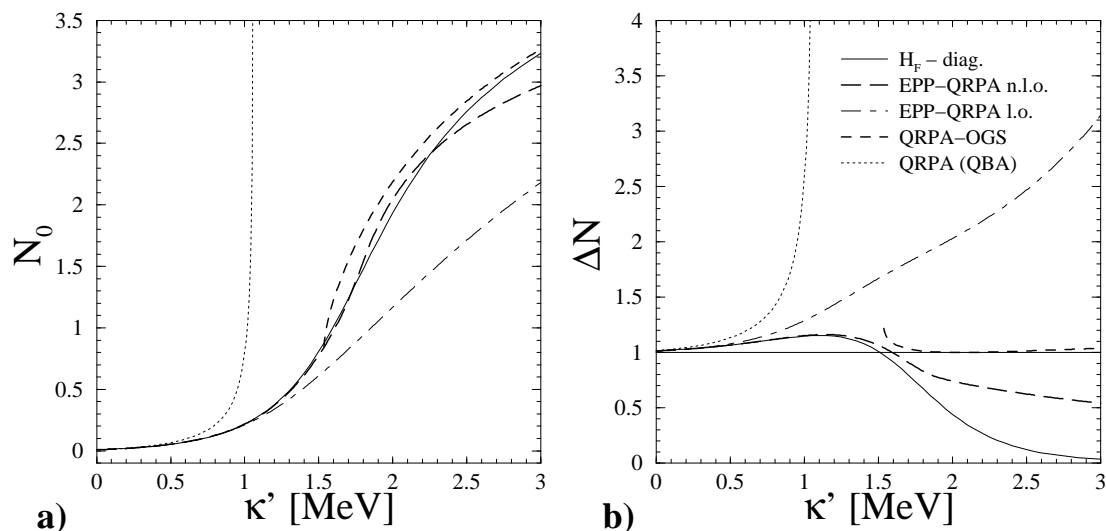
vlnových funkcií zatiaľ nebol dosiahnutý v žiadnej QRPA modifikácii s lineárnym fonónovým operátorom.

Stredný počet kvázičastíc vo vypočítanom základnom a vzbudenom stave ukazuje na množstvo korelácií v daných vlnových funkciách. Preto definujeme  $N_0 = \langle rpa|C/2|rpa \rangle$  a  $\Delta N = \langle rpa|Q^{(1)}C/2Q^{\dagger(1)}|rpa \rangle - N_0$ . Závislosti veličín  $N_0$  a  $\Delta N$  od sily  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa'$  sú nakreslené na obrázku 4.11. Okrem presných a EPP-QRPA n.l.o. hodnôt uvádzame aj EPP-QRPA l.o. a štandardné QRPA výsledky. Pre zaujímavosť je v grafoch 4.11 zobrazené aj najlepšie riešenie z predchádzajúcej kapitoly 4.1.2. Jedná sa o  $c3$  mód získaný v rámci metódy QRPA s optimálnym základným stavom (QRPA-OGS). Vidíme, že presné hodnoty  $N_0$  sú v oblasti veľkej sily  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa'$  rovnako dobre reprodukované EPP-QRPA n.l.o. a QRPA-OGS priblíženiami. V prípade  $\Delta N$  však jedine EPP-QRPA n.l.o. dokáže opísať

Obrázok 4.10: Faktor prekrytia exaktného stavu a QRPA vlnovej funkcie získanej štandardným QRPA, EPP-QRPA l.o. a EPP-QRPA n.l.o. výpočtom. **a)** sú prekrytia základných stavov, **b)** prvých vzbudených stavov.



Obrázok 4.11: Stredná hodnota  $N_0$  operátora polovičného počtu kvázičastíc ( $C/2$ ) v základnom stave (**a**) a rozdiel stredných hodnôt  $\Delta N$  operátora  $C/2$  vo vzbudenom a základnom stave ako funkcia parametra  $\kappa'$  (**b**). Označenie riešení je rovnaké ako v obrázku 4.8. *QRPA-OGS* je *c3*) riešenie z predchádzajúcej kapitoly 4.1.2.

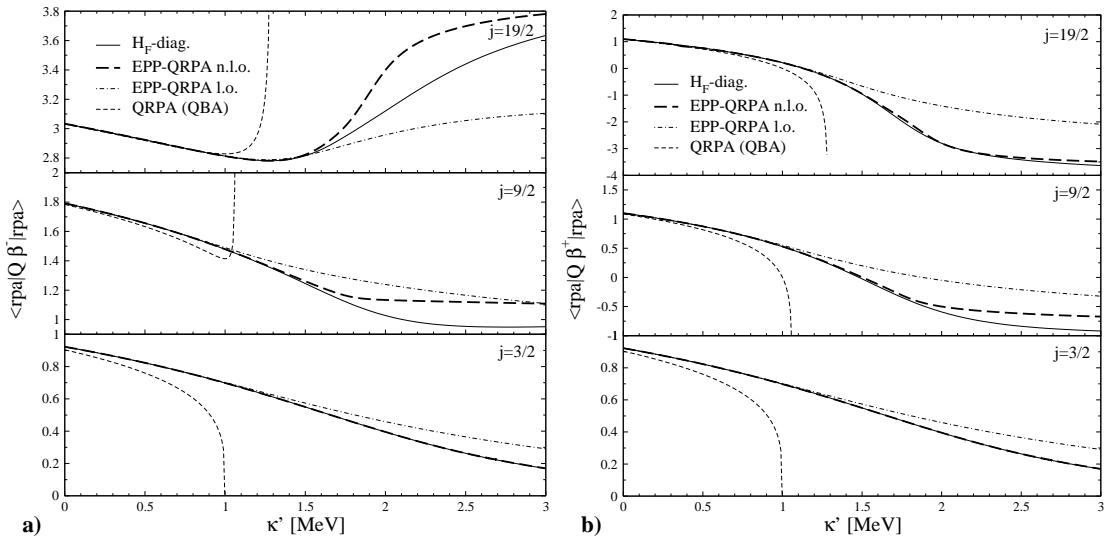


zmenu monotónnosti exaktnej funkcie  $\Delta N(\kappa')$  v okolí bodu  $\kappa' = 1.2 \text{ MeV}$  a kvalitatívne sledovať jej priebeh v oblasti  $\kappa' > 1.2 \text{ MeV}$ . Poznamenajme, že asymptotické správanie presného počtu  $\Delta N$  pri veľkých hodnotách  $p$ - $p$  interakcie dosiaľ nebolo

ani približne predpovedané žiadnou z doterajších QRPA metód.

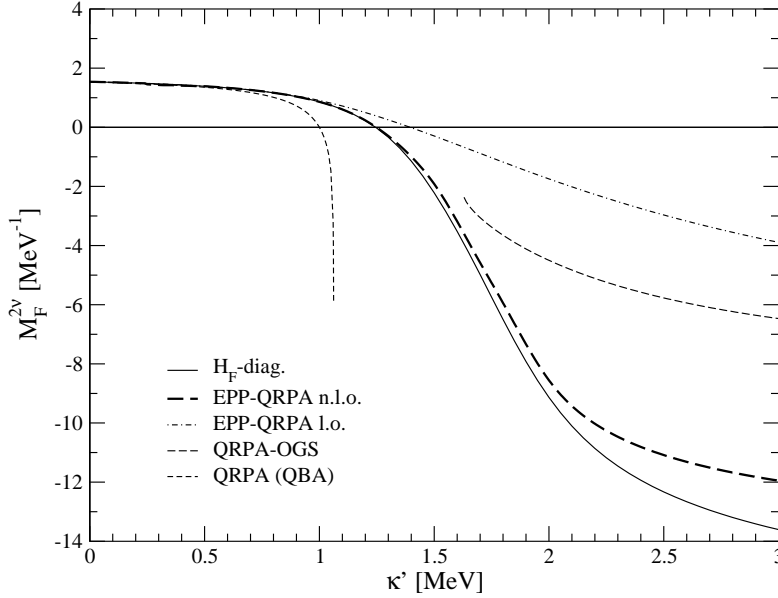
Po testoch vlnových funkcií aplikujeme teraz QRPA metódu s nelineárnym fonónovým operátorom (4.14) na výpočet jednoduchých  $\beta$ -prechodov a Fermiho maticového elementu  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu. Využijúc definície (2.64)  $\beta^\pm$  operátorov a vypočítané vlnové funkcie  $|rpa\rangle$  a  $Q^{\dagger(1)}|rpa\rangle$ , určíme  $\beta^-$  a  $\beta^+$  amplitúdy  $\langle rpa|Q^{(1)}\beta^-|rpa\rangle$  a  $\langle rpa|Q^{(1)}\beta^+|rpa\rangle$ . Získané hodnoty sú zobrazené na grafoch 4.12 ako funkcie parametra  $\kappa'$  v modeloch s rôznymi momentami hybnosti  $j$ , ktoré boli definované skôr. Popri EPP-QRPA n.l.o. výpočtoch aj tu uvádzame presné hodnoty, EPP-QRPA l.o. a štandardné QRPA výsledky. Treba podotknúť, že v modelovom pries-

Obrázok 4.12: Amplitúdy jednoduchých  $\beta^-$  (a)) a  $\beta^+$  (b)) prechodov v závislosti od sily  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa'$  počítané v modeloch s rôznym momentom hybnosti  $j$ . Označenie riešení je rovnaké ako v obrázku 4.8.



tore s  $j = 3/2$  pomocou EPP-QRPA n.l.o. metódy presne reprodukuje exaktné amplitúdy jednoduchých  $\beta^-$  a  $\beta^+$ -prechodov, ktoré sú v tomto prípade výnimočne rovnaké. V modeloch s väčším uhlovým momentom získané  $\beta^\pm$ -amplitúdy potvrdzujú trend pozorovaný na skôr počítaných veličinách: EPP-QRPA n.l.o. poskytuje podstatne lepšie predpovede exaktných hodnôt ako QRPA priblíženia s lineárnym fonónovým operátorom (EPP-QRPA l.o., štandardná QRPA). V rámci EPP-QRPA n.l.o. je zaujímavý lepší opis  $\beta^+$ -prechodov ako  $\beta^-$ -amplitúd v oblasti veľkých síl  $\kappa'$ . Dokonca v modeli  $j = 19/2$  sa dosahuje takmer úplná zhoda exaktných a EPP-QRPA n.l.o. výsledkov pre  $\beta^+$ -prechod. Paradoxne v priestore s menším momentom hybnosti  $j = 9/2$ , kde by sme očakávali lepšie výsledky ako v modeli s  $j = 19/2$ , je reprodukcia exaktných  $\beta^+$ -prechodov horšia. Keďže v oboch modeloch ( $j = 9/2$ ,  $j = 19/2$ ) je nelineárny tvar (4.14) fonónového operátora  $Q^\dagger$  neúplný z hľadiska presnej QRPA predpovede exaktných hodnôt daných veličín, je možné, že členy, ktoré chýbajú vo vyjadreniach  $\beta^+$ -amplitúd (vďaka neúplnosti  $Q^\dagger$ ), sú menej dôležité v priestore s  $j = 19/2$  ako v modeli s  $j = 9/2$ .

Obrázok 4.13: Fermiho maticový element  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu pri meniacom sa parametri  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa'$ . Jadrový prechod a použitý model je rovnaký ako pri obrázku 2.5. Označenie jednotlivých metód je vysvetlené v komentári ku grafu 4.8. QRPA-OGS sú najlepšie výsledky získané v rámci metódy QRPA s optimálnym základným stavom (pozri kapitolu 4.1.2).



Fermiho maticový element  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu ( $M_F^{2\nu}$ ) v našich schématických štúdiách definujeme vzťahom (2.63). Jeho výpočet sme kvôli možnosti porovnania uskutočnili pre rovnakú sadu modelových parametrov ako v predchádzajúcich kapitolách 2.3.2 a 4.1.2. Na obrázku 4.13 sú znázornené hodnoty  $M_F^{2\nu}$  vypočítané v novej metóde EPP-QRPA n.l.o. (s nelineárnym tvarom  $Q^\dagger$  (4.14)), a v známych priblíženiach: EPP-QRPA l.o., štandardná QRPA. Nakreslené je aj presné riešenie vytvorené pomocou diagonalizácie hamiltoniánu (2.48) a najlepšie riešenie pre  $M_F^{2\nu}$  získané v kapitole 4.1.2 v rámci metódy QRPA-OGS (ide o mód  $c23$ ). Z grafu 4.13 vyplýva, že prezentované QRPA výpočty s nelineárnym fonónovým operátorom sú najpresnejšie v opise exaktného  $2\nu\beta\beta$  maticového elementu na celom intervale možných hodnôt  $\kappa'$ . Po silu  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa' = 2\text{MeV}$  sú EPP-QRPA n.l.o. výsledky takmer úplne zhodné s exaktnými. V oblasti  $\kappa' > 2\text{MeV}$  dochádza k malej odchýlke EPP-QRPA n.l.o. hodnôt od presných čísel, čo pripisujeme jednoduchej nelineárnej štruktúre (4.14) QRPA fonónového operátora  $Q^\dagger$  vzhľadom k použitému modelu s uhlovým momentom  $j = 19/2$ . Všimnime si však, že aj jednoduché nelineárne vyjadrenie operátora  $Q^\dagger$  spôsobilo v QRPA výpočtoch významné zlepšenie výsledkov pre  $M_F^{2\nu}$  v porovnaní s prípadom lineárneho tvaru  $Q^\dagger$  (EPP-QRPA l.o.). Poznamenajme tiež, že optimalizácia určenia základného stavu jadra v metóde QRPA-OGS síce znamenala presnejší výpočet hodnôt  $M_F^{2\nu}$  v porovnaní s EPP-QRPA l.o., avšak tým, že uvedené QRPA-OGS riešenie súvisí s harmonickým opisom excitácií mnohonukleónového systému, nedokáže tak dobre



kopírovať exaktné  $2\nu\beta\beta$  maticové elementy ako EPP-QRPA n.l.o. výpočty. Metóda EPP-QRPA n.l.o. je totiž vďaka nelineárnej štruktúre  $Q^\dagger$  schopná opísať aj neharmonické efekty, ktoré sú prítomné v exaktnom vzbudenom stave a výrazne sa prejavujú pri veľkej sile  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa'$ .

Na záver zhrňme najdôležitejšie poznatky a výsledky z tejto časti:

- (i) Vytvorili sme QRPA formalizmus s nelineárnymi členmi vo fonónovom excitačnom operátore ( $Q^\dagger$ ). Idea použitia nelineárnej štruktúry  $Q^\dagger$  v rámci QRPA výpočtov bola prvýkrát úspešne realizovaná.
- (ii) Vývoj vhodného nelineárneho tvaru  $Q^\dagger$  bol uskutočnený v schématickom protón–neutrónovom Lipkinovom modeli, pričom kritériom úspešnosti danej QRPA metódy (formy operátora  $Q^\dagger$ ) bola čo možno najlepšia zhoda predpovedaných výsledkov s exaktnými hodnotami. Týmto spôsobom sme našli rozvoj  $Q^\dagger$  podľa mocnín bifermiónových operátorov ( $A^\dagger, A$ ), ktorý v danom modeli s uhlovým momentom  $j$  zabezpečí presný QRPA opis nepárnych exaktných vzbudených stavov vytvorených diagonalizáciou modelového hamiltoniánu na celom intervale hodnôt  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa'$ .
- (iii) Podrobne bol študovaný prípad QRPA metódy s najjednoduchšou nelineárnou štruktúrou fonónového operátora (z rozvoja (4.24)), označený *EPP-QRPA n.l.o.* Vypočítané vlnové funkcie a energie 1. a 3. vzbudeného stavu reprodujú príslušné presné stavy a energie v modeli s momentom hybnosti nukleónov  $j = 3/2$ . V priestoroch s väčším uhlovým momentom ( $j = 9/2, j = 19/2$ ) sa pomocou EPP-QRPA n.l.o. dosahuje najlepší opis exaktných vzbudených stavov spomedzi všetkých uvažovaných QRPA priblížení.
- (iv) Aplikácia metódy EPP-QRPA n.l.o. na výpočet jednoduchých a dvojitých  $\beta$ -prechodov viedla k získaniu doteraz najlepších výsledkov pre dané veličiny na celom intervale uvažovaných hodnôt sily  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa'$ . Ukázalo sa, že už vhodne zvolená najjednoduchšia nelineárna štruktúra fonónového operátora  $Q^\dagger$ , uvažovaná v QRPA výpočtoch, spôsobuje významné zlepšenie predpovedaných výsledkov v porovnaní s prípadom dosiaľ používaného lineárneho tvaru  $Q^\dagger$  v QRPA modifikáciách.

## 4.2.2 TDA a reprodukcia párných vzbudených stavov

Výsledky dosiahnuté v predchádzajúcej časti v QRPA výpočte nepárnych vzbudených stavov jadra nás viedli k otázke opisu párných (t.j. aj dvojfónových) excitácií mnohonukleónového systému a prípadnej reprodukcii párných vlastných hodnôt a funkcií uvažovaného hamiltoniánu (2.48). Spoločnou črtou prezentovaných nelineárných QRPA fonónových operátorov  $Q^\dagger$  (pozri tabuľku 4.2) je nepárny počet bifermiónových operátorov v jednotlivých členoch  $Q^\dagger$ , pričom rozdiel počtu kreačných ( $A^\dagger$ ) a anihilačných ( $A$ ) operátorov je rovný jednej. Iné konfigurácie, napríklad členy typu  $A^\dagger A^\dagger, A^\dagger A^\dagger A^\dagger$  (a k nim komplexne združené) boli zo štruktúry fonónového operátora vylúčené priamo neúspešným QRPA výpočtom. V týchto

prípadoch sa buď vôbec nenašlo riešenie QRPA systému rovníc, alebo sa získali výsledky zásadne sa líšiace od presných hodnôt daných diagonalizáciou hamiltoniánu už pri slabej časticovo–časticovej ( $p$ - $p$ ) interakcii medzi nukleónmi. Uvedeným postupom sme teda vylúčili aj možnosť konštrukcie párných vzbudených stavov v rámci danej QRPA metódy.

Ponúka sa preto alternatíva doplniť chýbajúce párne vzbudenie jadrového systému limitnými QRPA (TDA) výpočtami založenými na pôvodných QRPA výsledkoch. Predpokladajme, že poznáme QRPA riešenia (t.j. energie a vlnové funkcie) pre nepárne vzbudené stavy v danom modeli. Opis párných excitácií zdefinujeme pomocou nasledovného nelineárneho TDA fonónového operátora:

$$\Gamma^{\dagger(i)} = \sum_{k=1}^n Z_{2k}^{(i)} Q^{\dagger(k)} A^{\dagger}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.27)$$

$Z_{2k}^{(i)}$  sú variačné TDA amplitúdy - označujeme ich párnymi číslami ( $2k$ ), pretože ide o výpočet párných vzbudených stavov. Index  $i$  čísluje jednotlivé TDA riešenia (amplitúdy a energie) pre daný tvar operátora  $\Gamma^{\dagger}$  určený stupňom nelinearity  $n$  (podobne ako v nelineárnom QRPA prípade).  $Q^{\dagger(k)}$  je spolu s hodnotou  $n$  jednoznačne definovaný konkrétny QRPA fonónový operátor. Jeho štruktúra je uvedená vo vzťahu (4.24). Poznamenajme, že nelinearita operátora  $\Gamma^{\dagger}$  je určovaná len QRPA fonónovým operátorom  $Q^{\dagger(k)}$ . Samotná TDA časť  $\Gamma^{\dagger}$  má v definícii (4.27) vždy lineárny tvar  $ZA^{\dagger}$ . Nelineárna štruktúra TDA zložky operátora  $\Gamma^{\dagger}$  (napríklad  $Z_2 A^{\dagger} + Z_4 A^{\dagger} A^{\dagger} \dots$ ) nevedla na uspokojivé výsledky v porovnaní s exaktnými hodnotami, preto ju neuvažujeme. Spektrum párných vzbudených stavov jadra konštruujeme pôsobením operátora (4.27) na známy QRPA základný stav  $|rpa\rangle$ :

$$|2i\rangle = \Gamma^{\dagger(i)} |rpa\rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.28)$$

Ako bude ukázané nižšie, v modeli s danou hodnotou momentu hybnosti  $j$  sa pomocou príslušnej štruktúry fonónového operátora  $\Gamma^{\dagger}$  dá v rámci TDA výpočtov presne predpovedať sada párných vlastných funkcií a energií modelového hamiltoniánu (2.48). Spolu s QRPA výsledkami z predchádzajúcej časti tak vieme získať kompletný (a hlavne presný) opis exaktného spektra stavov uvažovaného hamiltoniánu. V tabuľke 4.3 je uvedených niekoľko prvých prípadov z rozvoja TDA operátora (4.27). Každému konkrétnemu tvaru operátora  $\Gamma^{\dagger(i)}$  je priradený vzbudený stav, ktorý je pomocou  $\Gamma^{\dagger(i)}$  generovaný v rámci TDA výpočtov a modelový priestor, v ktorom sa použitím  $\Gamma^{\dagger(i)}$  produkujú výsledky zhodné s exaktnými.

TDA modelové rovnice na výpočet vlnových funkcií a energií vzbudených stavov vytvoríme spôsobom opísaným v kapitole 2.2.3 na základe TDA podmienky

$$\Gamma^{(i)} |rpa\rangle = 0. \quad (4.29)$$

Táto je automaticky splnená vďaka platnosti QRPA rovnosti  $Q^{(i)} |rpa\rangle = 0$ . Pre tvar (4.27) TDA fonónového operátora dostávame systém TDA rovníc<sup>4</sup>:

$$\mathcal{A} Z_{TDA} = E_{TDA} \mathcal{U} Z_{TDA}, \quad (4.30)$$

<sup>4</sup>ich počet je  $n$ , čo vyplýva zo vzťahu (4.27)

Tabuľka 4.3: Vývoj nelineárnych členov TDA fonónového operátora, pomocou ktorého budujeme párne vzbudené stavy jadrového systému. Rovnako ako v tabuľke 4.2, index  $n$  vyjadruje stupeň nelinearity uvažovaného operátora a číslo  $i$  v zápise  $\Gamma^{\dagger(i)}$  označuje konkrétne TDA riešenie s daným nelineárnym tvarom  $\Gamma^{\dagger}$ .  $Q^{\dagger(i)}$  spolu s príslušnou hodnotou  $n$  je jednoznačne definovaný QRPA fonónový operátor, uvedený v tabuľke 4.2.

$n$	tvar TDA fonónového operátora	opisovaný stav	presný opis v modeli
1	$\Gamma^{\dagger(1)} = Z_2^{(1)} Q^{\dagger(1)} A^{\dagger}$	2.	$j = 1/2$
2	$\Gamma^{\dagger(1)} = \left( Z_2^{(1)} Q^{\dagger(1)} + Z_4^{(1)} Q^{\dagger(2)} \right) A^{\dagger}$	2.	$j = 3/2$
2	$\Gamma^{\dagger(2)} = \left( Z_2^{(2)} Q^{\dagger(1)} + Z_4^{(2)} Q^{\dagger(2)} \right) A^{\dagger}$	4.	$j = 3/2$
3	$\Gamma^{\dagger(1)} = \left( Z_2^{(1)} Q^{\dagger(1)} + Z_4^{(1)} Q^{\dagger(2)} + Z_6^{(1)} Q^{\dagger(3)} \right) A^{\dagger}$	2.	$j = 5/2$
3	$\Gamma^{\dagger(2)} = \left( Z_2^{(2)} Q^{\dagger(1)} + Z_4^{(2)} Q^{\dagger(2)} + Z_6^{(2)} Q^{\dagger(3)} \right) A^{\dagger}$	4.	$j = 5/2$
3	$\Gamma^{\dagger(3)} = \left( Z_2^{(3)} Q^{\dagger(1)} + Z_4^{(3)} Q^{\dagger(2)} + Z_6^{(3)} Q^{\dagger(3)} \right) A^{\dagger}$	6.	$j = 5/2$
...	...	...	...
$n$	$\Gamma^{\dagger(1)} = \dots$	2.	$j = (2n - 1)/2$
...	...	...	...
$n$	$\Gamma^{\dagger(n)} = \dots$	$2n.$	$j = (2n - 1)/2$

v ktorom neznáme sú vlastné vektory  $Z_{TDA}$  pozostávajúce z amplitúd  $Z_{2k}^{(i)}$  a excitačné energie  $E_{TDA}$ . Elementy TDA matic  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{U}$  sú nasledovné:

$$\mathcal{A}(k, l) = \langle rpa | [A Q^{(k)}, H, Q^{\dagger(l)} A^{\dagger}] | rpa \rangle, \quad \mathcal{U}(k, l) = \langle rpa | [A Q^{(k)}, Q^{\dagger(l)} A^{\dagger}] | rpa \rangle, \quad (4.31)$$

a predstavujú vstupné hodnoty rovnice (4.30). Ich explicitné vyjadrenia (nezávislé od TDA riešenia) získame použitím známeho základného stavu  $|rpa\rangle$  a konkrétneho QRPA fonónového operátora  $Q^{\dagger(i)}$ . Pri riešení systému (4.30) postupujeme podobne ako v prípade QRPA metódy z predchádzajúcej kapitoly. Najskôr diagonalizujeme normovaciu maticu  $\mathcal{U}$  za účelom získania jej rozkladu:

$$\mathcal{U} = \mathbf{D}\mathbf{L}^{1/2} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \mathbf{L}^{1/2}\mathbf{D}^{-1}, \quad (4.32)$$

kde  $\mathbf{L}$  je diagonálna matica pozostávajúca z vlastných hodnôt normy  $\mathcal{U}$  a  $\mathbf{D}$  je matica vlastných vektorov  $\mathcal{U}$ . Následne použitím rozkladu (4.32) prepíšeme TDA rovnicu (4.30) na štandardný tvar (problém vlastných vektorov a hodnôt):

$$\overline{\mathcal{A}} \overline{Z}_{TDA} = E_{TDA} \overline{Z}_{TDA}, \quad (4.33)$$

s označením  $\overline{\mathcal{A}} = \mathbf{L}^{-1/2}\mathbf{D}^{-1} \mathcal{A} \mathbf{D}\mathbf{L}^{-1/2}$ ,  $\overline{Z}_{TDA} = \mathbf{L}^{1/2}\mathbf{D}^{-1}Z_{TDA}$ . TDA amplitúdy a energie získame z (4.33) bežným postupom - diagonalizáciou matice  $\overline{\mathcal{A}}$ .

Uvažujme teraz konkrétny prípad TDA výpočtov s najjednoduchším fonónovým operátorom z definovaného rozvoja (4.27). Je to člen

$$\Gamma^{\dagger(1)} = Z_2^{(1)} Q^{\dagger(1)} A^\dagger, \quad n = 1, \quad (4.34)$$

pričom QRPA fonónový operátor  $Q^{\dagger(1)}$  má pri  $n = 1$  lineárnu štruktúru ( $Q^{\dagger(1)} = X_1^{(1)} A^\dagger - Y_1^{(1)} A$ ). Tento TDA model (označme ho TDA l.o.) je teda založený na výsledkoch QRPA výpočtov s lineárnym fonónovým operátorom. Aby sme získali čo najlepšie TDA výsledky, použijeme na určenie TDA matíc (4.31) QRPA komponenty  $X_1^{(1)}$ ,  $Y_1^{(1)}$  a  $|rpa\rangle$  vypočítané metódou EPP-QRPA l.o. (pozri predchádzajúce kapitoly 2.3.2, 4.2.1). Pripomeňme, že stav  $|rpa\rangle$  je v EPP-QRPA l.o. definovaný vzťahom (2.62) na základe presného riešenia QRPA podmienky  $Q^{\dagger(1)}|rpa\rangle = 0$ . Systém TDA rovníc (4.30) sa v uvažovanom prípade redukuje na jednu rovnicu (pretože  $n = 1$ ), odkiaľ vyplýva energia:

$$E_{TDA} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{U}}, \quad (4.35)$$

ktorá prislúcha 2. vzbudenému (dvojfonónovému) stavu jadra. Explicitné vyjadrenia matíc  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{U}$  v rámci TDA l.o. metódy sú uvedené v dodatku C.2. TDA amplitúdu  $Z_2^{(1)}$  určíme z požiadavky normovania 2. vzbudeného stavu  $\Gamma^{\dagger(1)}|rpa\rangle$ . Máme

$$\left(Z_2^{(1)}\right)^{-2} = \langle rpa|[A Q^{(1)}, Q^{\dagger(1)} A^\dagger]|rpa\rangle = \mathcal{U}. \quad (4.36)$$

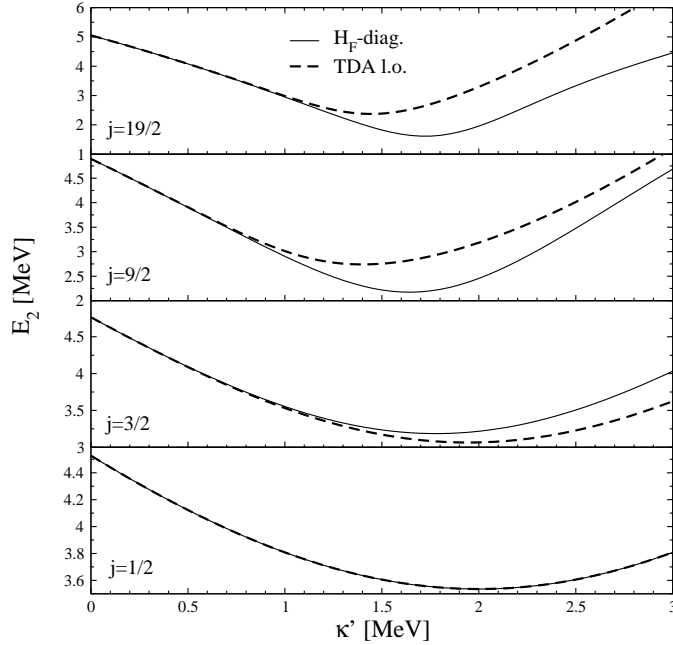
TDA l.o. výpočet sme uskutočnili v modelových priestoroch s nasledovným momentom hybnosti a počtom nukleónov:  $j = 1/2$ , ( $N = 1, Z = 1$ );  $j = 3/2$ , ( $N = 2, Z = 2$ );  $j = 9/2$ , ( $N = 6, Z = 4$ );  $j = 19/2$ , ( $N = 14, Z = 6$ ), pričom energiu kvázičastíc fixujeme hodnotou  $\epsilon = 1\text{MeV}$  a časticovo-dierovú reziduálnu interakciu berieme ako v predchádzajúcich štúdiách ( $\chi' = 0.5\text{MeV}$ ). Vypočítané TDA energie (4.35) označené ako  $E_2$ , sú zobrazené na grafe 4.14 v závislosti od parametrizácie  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa'$ . Spolu s nimi znázorňujeme aj presné hodnoty určené diagonalizáciou hamiltoniánu (2.48). Vidíme, že v modeli  $j = 1/2$  je nami predpovedaná TDA energia totožná s exaktnou energiou 2. vzbudeného stavu. Čiže celé spektrum vlastných hodnôt hamiltoniánu, pozostávajúce v tomto prípade z troch stavov (základný, 1. a 2. excitovaný stav), vieme reprodukovat pomocou EPP-QRPA l.o. a TDA l.o. výpočtov. So zväčšovaním modelového priestoru sa TDA opis presných energií  $E_2$  v oblasti veľkej sily  $p$ - $p$  interakcie zhoršuje, podobne ako v prípade EPP-QRPA l.o. výpočtov energie  $E_1$  (pozri obrázok 4.8). Je to dôsledok jednoduchej štruktúry TDA fonónového operátora  $\Gamma^{\dagger(1)}$  (obsahuje len lineárny QRPA operátor  $Q^{\dagger(1)}$ ), ktorá je v modeloch s  $j > 1/2$  nedostačujúca.

Uvažujme preto TDA metódu (označme ju TDA n.l.o.) s dokonalejším tvarom fonónového operátora<sup>5</sup>:

$$\Gamma^{\dagger(j)} = \left(Z_2^{(j)} Q^{\dagger(1)} + Z_4^{(j)} Q^{\dagger(2)}\right) A^\dagger, \quad j = 1, 2, \quad n = 2, \quad (4.37)$$

<sup>5</sup>ide o dva operátory majúce rovnakú štruktúru a opisujúce 2. a 4. vzbudený stav jadra

Obrázok 4.14: Energia druhého vzbuđeného stavu ( $E_2$ ) jadrového systému ako funkcia parametra  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa'$  v štyroch modeloch s rôznymi uhlovými momentami  $j$ .  $H_F$ -diag. sú exaktné hodnoty získané diagonalizáciou  $H_F$  a TDA l.o. sú TDA riešenia s fonónovým operátorom (4.34).



kde  $Q^{\dagger(1)}$  a  $Q^{\dagger(2)}$  ( $n = 2$ ) sú nelineárne QRPA fonónové operátory definované v tabuľke 4.2, ktoré (ako sme ukázali v predchádzajúcej kapitole 4.2.1) presne opisujú 1. a 3. vzbuđený stav v modeli s  $j = 3/2$ . Systém TDA rovníc (4.30) v tomto prípade obsahuje TDA matice s rozmerom  $2 \times 2$  a jeho riešením získame dve hodnoty energií  $E_{TDA} = E_2, E_4$  a takisto dva TDA vektory  $Z_{TDA} = (Z_2^{(1)}, Z_4^{(1)})$ ,  $(Z_2^{(2)}, Z_4^{(2)})$ . Pri odvodení TDA matíc  $\mathcal{A}(k, l)$ ,  $\mathcal{U}(k, l)$ , ( $k, l = 1, 2$ ) zo vzťahov (4.31) predpokladáme znalosť základného stavu  $|rpa\rangle$  (rovnica (4.15)) a QRPA amplitúd  $(X_1^{(1)}, Y_1^{(1)}, X_3^{(1)}, Y_3^{(1)})$  a  $(X_1^{(2)}, Y_1^{(2)}, X_3^{(2)}, Y_3^{(2)})$  určujúcich operátory  $Q^{\dagger(1)}$  a  $Q^{\dagger(2)}$ . Dané veličiny boli vypočítané v metóde EPP-QRPA n.l.o. v predchádzajúcej kapitole. Pre elementy TDA matice  $\mathcal{A}$  v rámci metódy TDA n.l.o. dostávame:

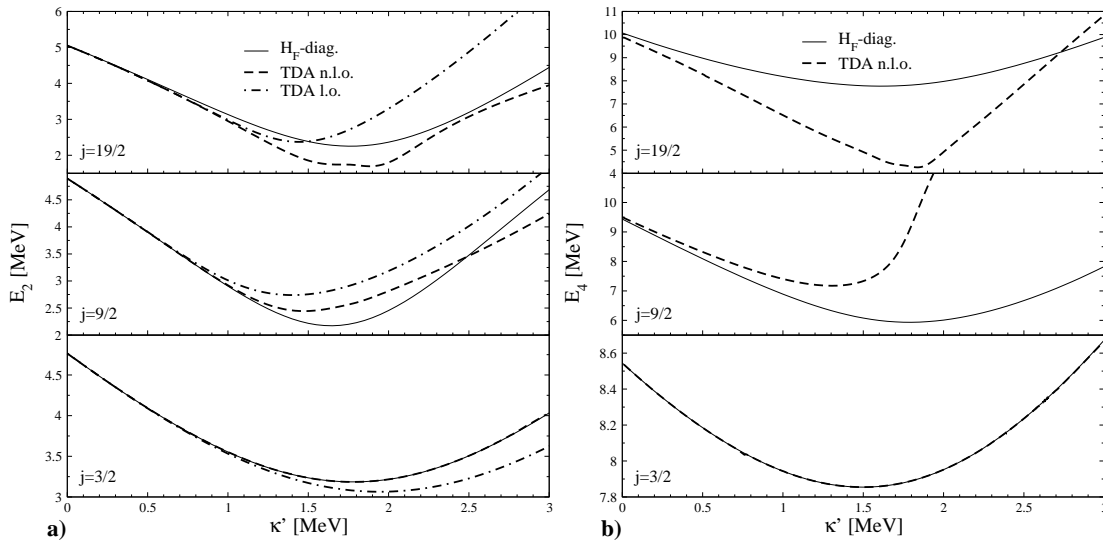
$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(k, l) = & X_1^{(k)} X_1^{(l)} \mathcal{A}_{X_1 X_1} + Y_1^{(k)} Y_1^{(l)} \mathcal{A}_{Y_1 Y_1} + X_3^{(k)} X_3^{(l)} \mathcal{A}_{X_3 X_3} + Y_3^{(k)} Y_3^{(l)} \mathcal{A}_{Y_3 Y_3} \\
& + \left( X_1^{(k)} X_3^{(l)} + X_3^{(k)} X_1^{(l)} \right) \mathcal{A}_{X_1 X_3} + \left( Y_1^{(k)} Y_3^{(l)} + Y_3^{(k)} Y_1^{(l)} \right) \mathcal{A}_{Y_1 Y_3} \\
& - \left( X_1^{(k)} Y_3^{(l)} + Y_3^{(k)} X_1^{(l)} \right) \mathcal{A}_{X_1 Y_3} - \left( Y_1^{(k)} X_3^{(l)} + X_3^{(k)} Y_1^{(l)} \right) \mathcal{A}_{X_3 Y_1} \\
& - \left( X_1^{(k)} Y_1^{(l)} + Y_1^{(k)} X_1^{(l)} \right) \mathcal{A}_{X_1 Y_1} - \left( X_3^{(k)} Y_3^{(l)} + Y_3^{(k)} X_3^{(l)} \right) \mathcal{A}_{X_3 Y_3}. \quad (4.38)
\end{aligned}$$

Vyjadrenia jednotlivých častí  $\mathcal{A}_{X_i X_j}$ ,  $\mathcal{A}_{Y_i Y_j}$ ,  $\mathcal{A}_{X_i Y_j}$  ( $i, j = 1, 3$ ) vzťahu (4.38) sú uvedené v dodatku C.2. Zložky matice  $\mathcal{U}$  získame zo zápisu (4.38) zamenou  $\mathcal{A}_{X_i X_j} \rightarrow \mathcal{U}_{X_i X_j}$ ,  $\mathcal{A}_{Y_i Y_j} \rightarrow \mathcal{U}_{Y_i Y_j}$ ,  $\mathcal{A}_{X_i Y_j} \rightarrow \mathcal{U}_{X_i Y_j}$ . Odvodené elementy  $\mathcal{U}_{X_i X_j}$ ,  $\mathcal{U}_{Y_i Y_j}$ ,

$\mathcal{U}_{X_i Y_j}$  sú tiež vypísané v dodatku C.2.

Na obrázkoch 4.15 a), b) je nakreslený priebeh energie  $E_2$  a  $E_4$  v závislosti od parametra  $\kappa'$ , vypočítaný v rámci TDA n.l.o. metódy a presne pomocou diagonalizácie modelového hamiltoniánu (2.48). V prípade hodnôt  $E_2$  je pre porovnanie uvedené aj TDA l.o. riešenie. Výsledky prezentujeme v modeloch identifikovaných momentom hybnosti nukleónov  $j = 3/2$ ,  $j = 9/2$  a  $j = 19/2$ . Z grafov 4.15

Obrázok 4.15: Energia druhého vzbudeného stavu (a) a štvrtá excitačná energia (b) jadrového systému v závislosti od sily  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa'$  v modeloch s rôznymi momentami hybnosti  $j$ .  $H_F$ -diag. sú exaktné energie, TDA n.l.o. je TDA riešenie s fonónovým operátorom (4.37) a TDA l.o. sú hodnoty prevzaté z obrázku 4.14.



vyplýva, že TDA n.l.o. metóda presným výpočtom energií  $E_2$  a  $E_4$  v priestore s  $j = 3/2$  dopĺňa reprodukciu celého exaktného spektra v tomto modeli (energie  $E_0$ ,  $E_1$  a  $E_3$  boli presne určené v QRPA n.l.o. modifikácii). Podobne ako pri QRPA n.l.o. výsledkoch, aj v obrázku 4.15 a) pozorujeme, že dokonalejšia štruktúra TDA fonónového operátora (v TDA n.l.o. priblížení) poskytuje lepší opis 2. vzbudeného stavu ako TDA l.o. metóda vo všetkých uvažovaných modeloch. Zaujímavé je, že v prípade modelového priestoru s momentom hybnosti  $j = 19/2$  TDA n.l.o. výpočty mierne podhodnocujú exaktné energie  $E_2$  v oblasti veľkej  $p$ - $p$  sily  $\kappa'$ , zatiaľ čo TDA l.o. metóda produkuje značne väčšie hodnoty  $E_2$ . Ak porovnáme TDA n.l.o. predpoveď presných energií  $E_2$  a  $E_4$  v modeloch s  $j > 3/2$ , vidíme, že výsledky pre  $E_2$  dobre korešpondujú s exaktnými na celom intervale síl  $\kappa'$ , avšak v prípade  $E_4$  je situácia výrazne horšia. Uspokojivé energie  $E_4$  sú získané len pre oblasť malých hodnôt sily  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa'$ . To znamená, že vo výpočte vyšších excitačných energií sú zložitejšie nelineárne členy TDA fonónového operátora viac dôležité ako pri opise najnižších vzbudených stavov a je potrebné ich uvažovať, ak chceme presnejšie určovať vyššie položené excitácie jadrového systému.

### Jednoduché a dvojité $\beta$ -prechody

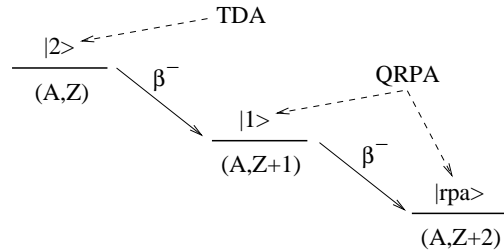
Získaný opis 1. a 2. vzbuđeného stavu v rámci metódy QRPA a jej limitného prípadu TDA, nám poskytuje možnosť uskutočniť zaujímavý a netradičný výpočet maticového elementu  $2\nu\beta\beta$ -prechodu. Vychádzajme zo stavu  $|rpa\rangle$ , ktorý má najnižšiu energiu a stotožnime ho so systémom  $(A, Z+2)$ . Pomocou QRPA (s operátorom  $Q^{\dagger(1)}$ ) vieme vytvoriť 1. excitovaný stav jadra  $(A, Z+1)$ :  $|1\rangle = Q^{\dagger(1)}|rpa\rangle$ , čo je intermediálne jadro pri  $\beta\beta$ -premene. V metóde TDA skonštruujeme dvojfónový (2. vzbuđený) stav pomocou operátora  $\Gamma^{\dagger(1)}$ :  $|2\rangle = \Gamma^{\dagger(1)}|rpa\rangle$ . Tento môžeme priradiť mnohonukleónovému systému  $(A, Z)$  (čiže iniciálnemu jadru), pretože štruktúra  $\Gamma^{\dagger(1)}$  pozostáva z operátorov  $A^\dagger A^\dagger$ ,  $AA^\dagger$ ,  $AA^\dagger A^\dagger A^\dagger$ ,  $AAA^\dagger A^\dagger$ , ..., pričom prvý a tretí pôsobením na vlnovú funkciu  $|rpa\rangle$  mení náboj o dve jednotky, zatiaľ čo druhý a štvrtý ho zachováva. Princíp konštrukcie maticového elementu  $2\nu\beta\beta$ -premeny  $(A, Z) \rightarrow (A, Z+2)$  je naznačený na obrázku 4.16. Treba zdôrazniť, že navrhnutý spôsob výpočtu  $2\nu\beta\beta$ -prechodu nie je zaťažovaný dvojkvakuovým problémom. Vzbuđené stavy prechodového jadrového systému sa počítajú len z finálneho jadra. Neurčitosť spôsobená neekvivalentnosťou intermediálnych stavov konštruovaných z pôvodného a konečného jadra v rámci QRPA, ktorá figuruje v bežných výpočtoch  $2\nu\beta\beta$ -maticových elementov, je v našom prípade eliminovaná. Pre Fermiho maticový element  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu môžeme na základe schémy 4.16 písať:

$$M_F^{2\nu} = \frac{\langle rpa|\beta^-|1\rangle\langle 1|\beta^-|2\rangle}{E_1 - E_0 + \Delta} = \frac{\langle rpa|\beta^-Q^{\dagger(1)}|rpa\rangle\langle rpa|Q^{(1)}\beta^-\Gamma^{\dagger(1)}|rpa\rangle}{E_{RPA} + \Delta}, \quad (4.39)$$

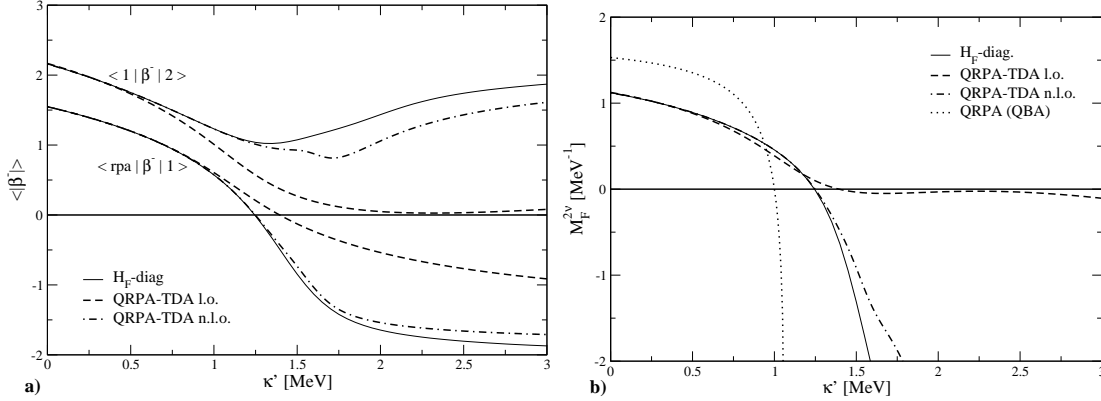
kde  $E_0$  je energia základného stavu jadra  $(A, Z+2)$  a  $E_1$  prislúcha stavu  $|1\rangle$ . Preto  $E_1 - E_0 = E_{RPA}$ , čo je 1. excitačná energia určená v QRPA pomocou operátora  $Q^{\dagger(1)}$ . Fermiho  $\beta^-$ -prechodové operátory sú definované v rovnici (2.64).

Výpočet amplitúd  $B_{01} = \langle rpa|\beta^-|1\rangle$ ,  $B_{12} = \langle 1|\beta^-|2\rangle$  a elementu  $M_F^{2\nu}$  realizujeme v dvoch jadrových-štruktúrnych priblíženiach, ktoré sme prezentovali v tejto a predchádzajúcej časti: (i) QRPA l.o. a TDA l.o. s fonónovými operátormi  $Q^{\dagger(1)}$ ,  $\Gamma^{\dagger(1)}$ ,  $n = 1$ , tento prístup označíme QRPA-TDA l.o., (ii) QRPA n.l.o. a TDA n.l.o. s fonónovými operátormi  $Q^{\dagger(1)}$ ,  $\Gamma^{\dagger(1)}$ ,  $n = 2$  (s označením QRPA-TDA n.l.o.). Modelový priestor volíme s rovnakými parametrami ako boli použité pri výpočte  $M_F^{2\nu}$  v kapitole 2.3.2 (obrázok 2.5). Získané výsledky pre jednoduché  $\beta^-$ -prechody  $B_{01}$ ,  $B_{12}$  a pre maticový element  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu (4.39), sú zobrazené na grafoch 4.17 a) a b). Naše modelové výpočty sú porovnávané s príslušnými presnými hodnotami odvodenými z diagonalizácie hamiltoniánu (2.48), pričom exaktný element  $M_F^{2\nu}$  je daný prvým vzťahom v (4.39).

Obrázok 4.16: Schéma výpočtu  $2\nu\beta\beta$ -maticového elementu pomocou QRPA a TDA konštrukcie príslušných jadrových stavov:  $|rpa\rangle$  a  $|1\rangle = Q^{\dagger(1)}|rpa\rangle$  sú vypočítané v rámci QRPA a  $|2\rangle = \Gamma^{\dagger(1)}|rpa\rangle$  v TDA (limitnom QRPA) modeli.



Obrázok 4.17: Amplitúdy jednoduchých  $\beta^-$ -prechodov (a)) definované v texte a maticový element  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu (4.39) (b)) pri meniacej sa  $p$ - $p$  sile  $\kappa'$ .  $H_F$ -diag je presné riešenie, QRPA-TDA l.o. a QRPA-TDA n.l.o. sú nové výsledky vysvetlené v texte a QRPA (QBA) je štandardný QRPA výpočet  $M_F^{2\nu}$  z definície (2.63). Použitý modelový priestor je rovnaký ako pri grafe 2.5.



Možný vplyv spomenutého dvojjákuového problému na výsledok  $M_F^{2\nu}$  je demonštrovaný štandardným QRPA riešením, ktoré tiež uvádzame v grafe 4.17 b). Maticový element  $M_F^{2\nu}$  je v tomto prípade počítaný zaužívaným postupom (2.63). V grafe 4.17 a) je zaujímavé, že podľa QRPA-TDA l.o. výpočtov sa  $\beta^-$ -prechod  $B_{12}$  pre silu  $\kappa' \geq 2\text{MeV}$  takmer vôbec nerealizuje napriek tomu, že presné hodnoty  $B_{12}$  sú v danej oblasti  $\kappa'$  nenulové a majú rastúcu tendenciu. QRPA-TDA n.l.o. výpočty naopak predpovedajú pre uvažované hodnoty  $\kappa'$  nenulové  $B_{12}$  amplitúdy, ktoré kvalitatívne opisujú exaktné výsledky. To znamená, že nenulové  $\beta^-$ -prechody medzi QRPA a TDA vzbudenými stavmi  $|1\rangle$  a  $|2\rangle$  sú realizované len vďaka nelineárnym členom vo fonónových operátoroch  $Q^{\dagger(1)}$ ,  $\Gamma^{\dagger(1)}$ , ( $n = 2$ ). Dodajme, že metódami QRPA-TDA n.l.o. je veľmi dobre kopírovaný presný  $B_{01}$   $\beta^-$ -prechod na celom uvažovanom intervale  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa'$ . Pomocou QRPA-TDA l.o. priblíženia získame dobré výsledky pre  $B_{01}$  amplitúdu len po veľkosť  $p$ - $p$  sily  $\kappa' \approx 1.25\text{MeV}$ .

Na obrázku (4.17) b) vidíme, že vo výpočtoch QRPA-TDA l.o. vďaka zanedbateľným  $\beta^-$ -prechodom  $B_{12}$  dostávame aj takmer nulové hodnoty maticového elementu  $M_F^{2\nu}$  v oblasti interakcie  $\kappa' \geq 1.25\text{MeV}$ . V okolí bodu  $\kappa' = 1.25\text{MeV}$  je silne potlačená tiež presná hodnota  $M_F^{2\nu}$ , ďalej však funkcia  $M_F^{2\nu}(\kappa')$  nadobúda nenulové záporné hodnoty. QRPA-TDA n.l.o. metóda poskytuje dobrý opis exaktných  $2\nu\beta\beta$ -prechodov. Pozorovateľné rozdiely od  $H_F$ -diag elementov sa začínajú prejavovať až pri sile  $\kappa' > 1.5\text{MeV}$ , čo je dôsledok menej presného výpočtu jednoduchej  $\beta^-$  amplitúdy  $B_{12}$  v tejto oblasti. Určenie  $2\nu\beta\beta$  maticových elementov pri  $\kappa' > 1.5\text{MeV}$  by sme mohli spresniť uvažovaním komplikovanejších fonónových operátorov z tabuliek 4.2 a 4.3 v QRPA a TDA modeloch. Všimnime si ďalej rozdiel v hodnotách  $M_F^{2\nu}$  získaných novým výpočtom (4.39) a bežne používaným postupom (2.63) reprezentovaným QRPA (QBA) výsledkami. Štandardná QRPA (QBA) metóda nadhodnocuje  $2\nu\beta\beta$  maticový element už pri malej  $p$ - $p$  interak-



cii medzi nukleónmi, kde všetky ostatné priblíženia poskytujú rovnaké výsledky. Predpokladáme, že tento efekt je spôsobený práve dvojjákuovým problémom, t.j. neurčitostou vyplývajúcou z neekvivalentnosti intermediálnych vzbudených stavov konštruovaných v QRPA z iniciálneho a finálneho jadra.

Najdôležitejšie výsledky uvedenej kapitoly môžeme zhrnúť do nasledovných bodov:

- (i) Prezentovali sme limitnú QRPA metódu (TDA) s originálnou nelineárnou štruktúrou príslušného fonónového operátora, ktorého súčasťou je niektorý z QRPA fonónových operátorov vyvinutý v predchádzajúcej kapitole. TDA typy výpočtov sú tak založené na výsledkoch riešenia QRPA rovníc so zodpovedajúcim (nelineárnym) fonónovým operátorom.
- (ii) Podobne ako pri QRPA metóde na opis nepárnych vzbudených stavov, našli sme princíp (predpis) konštrukcie vhodného tvaru nelineárneho TDA fonónového operátora ( $\Gamma^+$ ), ktorý zabezpečí v rámci TDA výpočtov presnú reprodukciu párných exaktných vzbudených stavov mnohonukleónového systému v danom modeli. Stupeň nelinearity operátora  $\Gamma^+$  je pritom určený len QRPA časťou štruktúry  $\Gamma^+$ , TDA zložka ostáva lineárna.
- (iii) Konkrétne TDA výpočty excitovaných stavov a ich energií sme previedli s dvomi rôznymi tvarmi operátorov  $\Gamma^+$ . Pomocou nich boli získané presné výsledky v modeloch s momentom hybnosti  $j = 1/2$ ,  $j = 3/2$ . Spolu s príslušnými QRPA výpočtami sme tak dosiahli presný opis celého spektra exaktných vzbudených stavov v uvedených modeloch.
- (iv) Na základe QRPA a TDA konštrukcie vzbudených stavov  $(A, Z + 1)$  a  $(A, Z)$  zo systému  $(A, Z + 2)$ , sme navrhli nový spôsob výpočtu jadrových maticových elementov  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu, ktorý nie je zafaržený tzv. dvojjákuovým problémom. Schématický výpočet Fermiho  $2\nu\beta\beta$ -prechodu novým postupom ukázal potlačenie príslušného maticového elementu  $M_F^{2\nu}$  oproti jeho bežnému určeniu zo štandardnej definície (2.63). Pozorovaná redukcia hodnôt  $M_F^{2\nu}$  už pri malej sile  $\kappa'$  je zrejme dôsledkom eliminovania spomenutej dvojjákuovej neurčitosti v novom prezentovanom postupe na určenie elementu  $M_F^{2\nu}$ .

### 4.2.3 Diskusia

V kapitole o súčasnom stave problematiky bola uvedená QRPA metóda s úplným zachovaním Pauliho vylučovacieho princípu (EPP-QRPA). Napriek tomu, že v nej nie sú použité žiadne aproximácie pri výpočte modelových RPA matic, získané výsledky sa líšia od exaktných v oblasti veľkej sily časticovo-časticovej ( $p$ - $p$ ) interakcie a poukazujú na nedokonalosť niektorých predpokladov QRPA modelu (lineárny fonónový operátor, neuspokojivá definícia RPA vlnovej funkcie). Nedostatočné určenie základného stavu  $|rpa\rangle$ , realizované len QRPA podmienkou  $Q|rpa\rangle = 0$  (kde  $Q$  je fonónový operátor), sme riešili jeho optimalizáciou (pozri kapitolu 4.1). Precízna definícia vlnovej funkcie  $|rpa\rangle$  v QRPA-OGS znamenala podstatné zlepšenie

všetkých uvažovaných výsledkov. Ukázalo sa však, že na opis vzбудených stavov jadra je QRPA-OGS riešenie, súvisiace s harmonickými vibráciami okolo základného stavu, neúplné a nedostačujúce. Preto sme pristúpili k vývoju dokonalejšej formy excitačného fonónového operátora v EPP-QRPA metóde.

Pomocou testovacích QRPA výpočtov sme našli predpis na generovanie takej nelineárnej štruktúry QRPA fonónového operátora, ktorá dokáže v rámci EPP-QRPA v danom modelovom priestore presne reprodukovať spektrum nepárnych excitovaných stavov získaných diagonalizáciou modelového hamiltoniánu (2.48) na celom intervale uvažovaných síl  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa'$ . To znamená, že neharmonické efekty prítomné vo vlnových funkciách exaktných vzбудených stavov, sa dajú obsiahnuť v rámci QRPA zahrnutím vhodných nelineárnych členov do fonónového operátora. Poznamenajme, že čím väčší je uvažovaný schématický model (počet nukleónov a ich moment hybnosti), tým zložitejšia musí byť štruktúra QRPA fonónového operátora ( $Q^\dagger$ ) na presný opis excitácie mnohonukleónového systému. Dokonalejší tvar  $Q^\dagger$  znamená aj väčšie množstvo variačných QRPA amplitúd a zväčšenie dimenzie RPA matíc vystupujúcich v QRPA rovniciach.

Podrobne sme študovali EPP-QRPA metódu s najjednoduchším nelineárnym tvarom operátora  $Q^\dagger$  z tabuľky 4.2 (EPP-QRPA n.l.o. metóda). Ukázalo sa, že aj jednoduchá nelinearita zahrnutá v  $Q^\dagger$  spôsobila významné zlepšenie predpovedaných výsledkov v oblasti veľkých hodnôt sily  $\kappa'$  pre všetky použité modelové priestory. Má teda význam uvažovať o využití nelineárneho fonónového operátora (4.14) v realistických QRPA výpočtoch. Otvoreným problémom tu zostáva otázka konštrukcie základného stavu  $|rpa\rangle$ , ktorého presné vyjadrenie nepoznáme. V tomto smere môže byť užitočná formulácia QRPA metódy v bozónovom priestore a použitie približného predpisu pre  $|rpa\rangle$ , získaného pomocou QBA (vzťah (2.61) resp. (4.96)). Predpokladáme, že napriek aproximatívne určeniu vlnovej funkcie  $|rpa\rangle$ , dvojnásobný počet stupňov voľnosti vo fonónovom operátore (4.14) (v porovnaní s lineárnym operátorom  $Q^\dagger$ ) umožní podstatne lepší opis kolektívnych excitácií jadrového systému ako dosiaľ používaný lineárny tvar  $Q^\dagger$ .

Hľadanie vhodného nelineárneho tvaru QRPA fonónového operátora na výpočet vzбудených stavov jadra okrem iného ukázalo, že pôvodný QRPA model nepokrýva opis párnych excitovaných stavov. Tento poznatok nás viedol k uvažovaniu limitnej QRPA metódy (TDA). Aj tu bola nájdená taká štruktúra TDA fonónového operátora ( $\Gamma^\dagger$ ), ktorá vedie na presný opis párnych vlastných funkcií hamiltoniánu (2.48) v danom modelovom priestore. Vytvorené operátory  $\Gamma^\dagger$  (pozri tabuľku 4.3) sú typické tým, že ich TDA časť je len lineárna. Stupeň nelinearity operátora  $\Gamma^\dagger$  určuje QRPA fonónový operátor ( $Q^\dagger$ ), ktorý je jeho súčasťou. TDA výpočtom musí preto predchádzať príslušná QRPA diagonalizácia určujúca stav  $|rpa\rangle$  a variačné amplitúdy definujúce operátor  $Q^\dagger$ . Jestvujúce EPP-QRPA n.l.o. výsledky sme použili v TDA výpočtoch s prislúchajúcim fonónovým operátorom (4.37) (metóda TDA n.l.o.). V modeloch s väčším počtom nukleónov (a momentom hybnosti  $j = 9/2, 19/2$ ) bol pozorovaný pri TDA n.l.o. a QRPA n.l.o. výpočtoch lepší opis nízko ležiacich vzбудených stavov (s energiami  $E_1, E_2$ ) ako vyšších stavov (s energiami  $E_3, E_4$ ). Na presnejšie určenie vyššie položených exci-

tácií v uvedených veľkých modelových priestoroch je potrebné uvažovať zložitejšie fonónové operátory z tabuliek 4.2, 4.3 v QRPA a TDA metódach.

Dôležitým prínosom uvedených (limitných) QRPA modifikácií je okrem schopnosti presného opisu exaktných vzбудených stavov aj možnosť nového spôsobu výpočtu  $2\nu\beta\beta$ -prechodu. S využitím vytvorených excitovaných stavov prislúchajúcich systémom  $(A, Z)$  a  $(A, Z + 1)$ , vychádzajúc z jadra  $(A, Z + 2)$ , vieme skonštruovať maticový element  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu, ktorý nie je zaťažený neurčitou súvisiacou s dvojjákuovým problémom. Nové schématické výpočty  $2\nu\beta\beta$ -maticového elementu  $M_F^{2\nu}$  pritom ukazujú na výraznú redukciu hodnôt  $M_F^{2\nu}$  v porovnaní s ich bežným výpočtom. Predpokladáme, že je to dôsledok eliminácie spomenutej dvojjákuovej neurčitosti v našom novom prístupe. Bude preto veľmi zaujímavé uskutočniť realistický výpočet  $2\nu\beta\beta$ -prechodu novým definovaným spôsobom pre vhodné jadrové systémy podliehajúce  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu. Realizácia tohto výpočtu nie je problematická v prípade TDA l.o. metódy s operátorom (4.34), kde za základ môžu byť použité napríklad RQRPA výsledky, ktoré budú určovať sadu intermediálnych vzбудených stavov konštruovaných z jadra  $(A, Z+2)$ . Použitie TDA n.l.o. modifikácie v nových  $2\nu\beta\beta$  výpočtoch je podmienené úspešným aplikovaním QRPA n.l.o. metódy v modeloch s realistickou nukleón–nukleónovou interakciou.

Dá sa očakávať, že prezentovaná TDA metóda s nelineárnym fonónovým operátorom  $\Gamma^\dagger$  zohrá dôležitú úlohu aj v prípade reálneho opisu excitovaných stavov s dvojjonónovou štruktúrou. Tieto sa uplatňujú pri výpočtoch amplitúd  $\beta\beta$ -prechodov do  $0^+$  vzbudených finálnych stavov. Konštrukcia ich vlnových funkcií je dosiaľ realizovaná v rámci QRPA viazaním dvoch fonónových operátorov  $[Q^\dagger Q^\dagger]_{J=0}$  [GV92], alebo v úvode spomenutým QRPA postupom s operátorom  $aQ^\dagger_{J=0} + b[Q^\dagger Q^\dagger]_{J=0}$  [DS03]. Ako ukazujú naše štúdie, takéto tvary fonónových operátorov nemajú oporu v schématických výpočtoch. Preto predpokladáme, že realistické TDA výpočty vzbudených  $0^+$  dvojjonónových stavov majú väčšie opodstatnenie ako jestvujúce predpovede založené na pôvodných QRPA priblíženiach a povedú k lepšiemu súhlasu získaných výsledkov s experimentálnymi hodnotami.

Na záver môžeme skonštatovať, že boli vytvorené nové QRPA modifikácie s nelineárnymi fonónovými operátormi, v ktorých sa získali presné výsledky, identické s exaktnými hodnotami vyplývajúcimi z diagonalizácie modelového hamiltoniánu. Tieto poznatky stimulujú aplikovanie vytvorených metód na realistické výpočty  $\beta$  a  $\beta\beta$ -prechodov.

### 4.3 Rozptylové členy hamiltoniánu. Plne renormalizovaná QRPA

V kapitole o súčasnom stave problematiky sme v časti 2.2.2 spomenuli problém nezachovania Ikedovho sumačného pravidla (ISR) pri renormalizovaných QRPA (RQRPA) výpočtoch amplitúd jednoduchých  $\beta$ -prechodov. Bolo tiež uvedené, že „self-konzistentná“ verzia RQRPA metódy čiastočne odstraňuje tento nedostatok RQRPA, čo však nemôže byť považované za definitívne riešenie daného problému.

Nová navrhnutá metóda *Plne renormalizovaná QRPA* (FR-QRPA) [RF02], ktorá spĺňa ISR z definície, dosiaľ nebola realizovaná kvôli problémom s výpočtom QRPA matíc.

Ako možný dôvod nezachovania Ikedovho sumačného pravidla presnými a EPP-QRPA výpočtami je v schématických štúdiách [Š<sup>+</sup>00] uvedené zanedbanie tzv. rozptylových členov  $B_{pn}^\dagger, B_{pn}$  pri prepise jadrového hamiltoniánu do kvázičasticovej reprezentácie. Pripomeňme, že operátory  $B_{pn}^\dagger, B_{pn}$  sa neuvažujú v QRPA a RQRPA výpočtoch, pretože vďaka definovaným priblíženiam (QBA) na výpočet komutátorov bifermiónových operátorov, rozptylové členy neprispievajú do modelových RPA matíc. To však nie je pravda v prípade dokonalejších QRPA metód, ktoré počítajú maticové elementy presnejšie ako QRPA a RQRPA.

V tejto kapitole uvažujeme schématický model (2.45) obsahujúci rozptylové členy  $B_{pn}^\dagger, B_{pn}$ , ktoré spolu s ostatnými operátormi spĺňajú algebru SO(5) grupy. Je ukázané, že príslušný kvázičasticový hamiltonián sa dá diagonalizovať za účelom získania presných výsledkov pre požadované veličiny. Vplyv zahrnutia bifermiónových operátorov  $B_{pn}^\dagger, B_{pn}$  do výpočtov (hlavne v súvislosti s ISR) je študovaný jednak v presnom riešení, jednak v PP2-QRPA priblížení<sup>6</sup> navrhnutom v [Š<sup>+</sup>00]. Prvýkrát je realizovaný opis štruktúry jadra v rámci Plne renormalizovanej QRPA aproximácie. S použitím hamiltoniánu (2.45) sa podarilo nájsť prvé numerické FR-QRPA výsledky, ktoré konfrontujeme s predpoveďami ostatných uvedených metód.

Modelový SO(5) hamiltonián (2.45) kvôli prehľadnosti prepíšeme explicitne cez bifermiónové operátory. S použitím vzťahov (2.46) máme:

$$\begin{aligned} H = & E_p N_p + E_n N_n + \lambda_1 (A_{pn}^\dagger A_{pn} + A_{pn} A_{pn}^\dagger) + \lambda_2 (A_{pn}^\dagger A_{pn}^\dagger + A_{pn} A_{pn}) \quad (4.40) \\ & + \lambda_3 (B_{pn}^\dagger B_{pn} + B_{pn} B_{pn}^\dagger) + \lambda_4 (B_{pn}^\dagger B_{pn}^\dagger + B_{pn} B_{pn}) + \lambda_5 (A_{pn} B_{pn}^\dagger + B_{pn} A_{pn}^\dagger) \\ & + \lambda_6 (B_{pn}^\dagger A_{pn} + A_{pn}^\dagger B_{pn}) + \lambda_7 (A_{pn}^\dagger B_{pn}^\dagger + B_{pn} A_{pn}) + \lambda_8 (B_{pn}^\dagger A_{pn}^\dagger + A_{pn} B_{pn}), \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \lambda_1 = & 2\Omega \left[ \chi (u_p^2 v_n^2 + v_p^2 u_n^2) - \kappa (u_p^2 u_n^2 + v_p^2 v_n^2) \right], \quad \lambda_2 = 4\Omega (\chi + \kappa) u_p v_p u_n v_n, \\ \lambda_3 = & 2\Omega \left[ \chi (u_p^2 u_n^2 + v_p^2 v_n^2) - \kappa (u_p^2 v_n^2 + v_p^2 u_n^2) \right], \quad \lambda_4 = -\lambda_2, \\ \lambda_5 = & 2\Omega \left[ \chi (v_p^2 u_n v_n - u_p^2 v_n u_n) - \kappa (v_p^2 u_n v_n - u_p^2 v_n u_n) \right], \quad \lambda_6 = \lambda_5, \\ \lambda_7 = & 2\Omega \left[ \chi (v_n^2 u_p v_p - u_n^2 u_p v_p) - \kappa (v_n^2 u_p v_p - u_n^2 u_p v_p) \right], \quad \lambda_8 = \lambda_7. \quad (4.41) \end{aligned}$$

Ako sme spomenuli vyššie, členy  $A_{pn}^\dagger, B_{pn}^\dagger$  a k nim komplexne združené, sú súčasťou

---

<sup>6</sup>EPP-QRPA výpočty sú v tomto schématickom modeli problematické z hľadiska výpočtu nových maticových elementov  $\langle rpa | B_{pn}^\dagger B_{pn} | rpa \rangle, \dots$

uzavretej algebrы. Jej generátory definujeme nasledovne:

$$\begin{aligned}
N_p &= \sum_m \alpha_{pm}^\dagger \alpha_{pm}, & N_n &= \sum_m \alpha_{nm}^\dagger \alpha_{nm}, \\
A_{pn}^\dagger &= [\alpha_p^\dagger \alpha_n^\dagger]^{00} = \frac{1}{\hat{j}} \sum_m \alpha_{pm}^\dagger \tilde{\alpha}_{nm}^\dagger, & A_{pn} &= (A_{pn}^\dagger)^\dagger, \\
B_{pn}^\dagger &= [\alpha_p^\dagger \tilde{\alpha}_n]^{00} = -\frac{1}{\hat{j}} \sum_m \alpha_{pm}^\dagger \alpha_{nm}, & B_{pn} &= (B_{pn}^\dagger)^\dagger, \\
A_{\tau\tau}^\dagger &= [\alpha_\tau^\dagger \alpha_\tau^\dagger]^{00} = \frac{1}{\hat{j}} \sum_m \alpha_{\tau m}^\dagger \tilde{\alpha}_{\tau m}^\dagger, & A_{\tau\tau} &= (A_{\tau\tau}^\dagger)^\dagger, \quad (\tau = p, n),
\end{aligned} \tag{4.42}$$

s fázovou konvenciou  $\tilde{\alpha}_{\tau m} = (-1)^{j-m} \alpha_{\tau-m}$  a  $\hat{j} \equiv \sqrt{2j+1} = \sqrt{2\Omega}$ . Operátory (4.42) splňajú nasledujúce komutačné vzťahy, ktoré sú dôležité pri presnom výpočte QRPA modelových matic:

$$\begin{aligned}
[A_{pn}, A_{pn}^\dagger] &= 1 - (N_p + N_n)/\hat{j}^2, & [A_{pn}, A_{pp}^\dagger] &= 2B_{pn}^\dagger/\hat{j}, & [A_{pn}, A_{nn}^\dagger] &= 2B_{pn}/\hat{j}, \\
[A_{pn}, B_{pn}^\dagger] &= -A_{nn}/\hat{j}, & [A_{pn}, N_p] &= A_{pn}, & [A_{pn}, N_n] &= A_{pn}, \\
[A_{pn}, A_{pp}] &= 0, & [A_{pn}, A_{nn}] &= 0, & [B_{pn}, A_{nn}^\dagger] &= 0, \\
[B_{pn}, A_{pp}] &= 0, & [B_{pn}, B_{pn}^\dagger] &= (N_n - N_p)/\hat{j}^2, & [B_{pn}, A_{pp}^\dagger] &= -2A_{pn}^\dagger/\hat{j}, \\
[B_{pn}, A_{pn}] &= A_{pp}/\hat{j}, & [B_{pn}, A_{nn}] &= 2A_{pn}/\hat{j}, & [B_{pn}, N_p] &= B_{pn}, & [B_{pn}, N_n] &= -B_{pn}, \\
[A_{pp}, A_{pp}^\dagger] &= 2 - 4N_p/\hat{j}^2, & [A_{pp}, A_{nn}^\dagger] &= 0, & [A_{pp}, N_p] &= 2A_{pp}, & [A_{pp}, N_n] &= 0, \\
[A_{nn}, A_{nn}^\dagger] &= 2 - 4N_n/\hat{j}^2, & [A_{nn}, A_{pp}] &= 0, & [A_{nn}, N_p] &= 0, & [A_{nn}, N_n] &= 2A_{nn}, \\
[N_n, N_p] &= 0.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Vidíme, že pri prechode z SU(2) do SO(5) symetrického modelu je potrebné brať do úvahy aj operátory  $A_{\tau\tau}^\dagger, A_{\tau\tau}$ , ( $\tau = p, n$ ). Diagonalizácia hamiltoniánu (4.40) sa dá uskutočniť v báze stavov  $|k\rangle = (A_{pn}^\dagger)^k |0\rangle$ , kde  $|0\rangle$  je vákuum pre kvázičasticové operátory  $\alpha_\tau^\dagger$  a  $0 \leq k \leq 2\Omega$ . Maticu, ktorú treba diagonalizovať, vieme nájsť s využitím algebrы (4.43). Jej nenulové elementy sú:

$$\begin{aligned}
\langle k|H|k\rangle &= (E_p + E_n) k m_k + \lambda_1 \left( 2m_{k+1} - 2m_k + \frac{k m_k}{\Omega} \right) \\
&\quad + \lambda_3 \left( \langle k|B_{pn}^\dagger B_{pn}|k\rangle + \langle k|B_{pn} B_{pn}^\dagger|k\rangle \right), \\
\langle k-2|H|k\rangle &= \lambda_2 m_k.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Stredné hodnoty  $\langle k|B_{pn}^\dagger B_{pn}|k\rangle$  a  $\langle k|B_{pn} B_{pn}^\dagger|k\rangle$  určíme rekurentne:

$$\langle k|B_{pn}^\dagger B_{pn}|k\rangle = \langle k|B_{pn} B_{pn}^\dagger|k\rangle = \frac{k^2}{\hat{j}^2} \langle k-1|A_{pp} A_{pp}^\dagger|k-1\rangle, \tag{4.45}$$

pričom

$$\begin{aligned}
\langle k|A_{pp} A_{pp}^\dagger|k\rangle &= 2 \left( 1 - \frac{k}{\Omega} \right) m_k + 2 \left( 1 - \frac{k-2}{\Omega} \right) m_{k-2} \\
&\quad + \frac{(k(k-1)(k-2)(k-3))^2}{\hat{j}^8} \langle k-4|A_{pp} A_{pp}^\dagger|k-4\rangle.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Maticový element  $m_k = \langle 0 | A_{pn}^k (A^\dagger)_{pn}^k | 0 \rangle$  je definovaný v (2.53). Pripomeňme, že protón–neutrónový Lipkinov model (2.48) dostaneme z hamiltoniánu (4.40) vypnutím všetkých interakčných členov okrem  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$ . Takto môžeme v presných aj QRPA výpočtoch študovať efekty spôsobené operátormi  $B_{pn}^\dagger$ ,  $B_{pn}$ .

### 4.3.1 Plne renormalizovaná QRPA metóda

Uveďme stručne princíp FR-QRPA aproximácie. Je založená na takej definícii fonónového operátora, ktorá je odvodená z analytickej podmienky pre splnenie Ikedovho sumačného pravidla. Daný operátor má tvar [RF02]:

$$Q^\dagger = X\bar{A}^\dagger - Y\bar{A}, \quad Q = (Q^\dagger)^\dagger, \quad (4.47)$$

v ktorom

$$\bar{A}^\dagger = A_{pn}^\dagger + V_n B_{pn}^\dagger + V_p B_{pn}, \quad \bar{A} = (\bar{A}^\dagger)^\dagger, \quad V_n = \frac{-u_n v_n}{v_n^2 - v_p^2}, \quad V_p = \frac{u_p v_p}{v_n^2 - v_p^2}. \quad (4.48)$$

Plne renormalizované operátory  $\bar{A}^\dagger$ ,  $\bar{A}$  obsahujú BCS amplitúdy  $u_\tau$ ,  $v_\tau$ , ( $\tau = p, n$ ). Tieto musia byť modifikované v QRPA výpočtoch tak, aby spĺňali „self-konzistentné“ podmienky (2.40) pre počty neutrónov ( $N$ ) a protónov ( $Z$ ). V uvažovanom SO(5) modeli majú dané podmienky zjednodušené vyjadrenia:

$$\begin{aligned} Z &= \hat{j}^2 v_p^2 + (1 - 2v_p^2) \langle rpa | N_p | rpa \rangle, \\ N &= \hat{j}^2 v_n^2 + (1 - 2v_n^2) \langle rpa | N_n | rpa \rangle, \end{aligned} \quad (4.49)$$

kde  $|rpa\rangle$  je FR-QRPA základný stav. Uvedená konštrukcia operátora  $Q^\dagger$  a vzbudených stavov  $Q^\dagger |rpa\rangle$  zabezpečuje vo FR-QRPA výpočtoch splnenie Ikedovho sumačného pravidla univerzálne, bez ohľadu na to, či počítame Fermiho alebo Gamow-Tellerove  $\beta$ -prechody. Realizácia FR-QRPA metódy však môže byť problematická. Zo vzťahov (4.48) vidíme, že v prípade  $v_n \rightarrow v_p$  dostávame divergenciu vo fonónovom operátore. Pre vysoko ležiace vzbudené stavy, kde diskkrétne jednočasticové energetické spektrum prechádza do spojitého, môže nastať situácia  $v_n \approx v_p$ . Tento nedostatok FR-QRPA je treba odstrániť vhodným vyjadrením RPA maticových elementov (definíciou základného stavu  $|rpa\rangle$ ), ktoré budú eliminovať vzniknuté divergencie FR-QRPA matíc v danej oblasti energetického spektra. Pokusy o získanie FR-QRPA riešenia v realistických výpočtoch boli dosiaľ neúspešné.

Pokračujme preto v našom schématickom modeli. Systém FR-QRPA rovníc je identický so vzťahom (2.55). Dvojné komutátory v QRPA maticiach  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{U}$  vypočítame presne s pomocou komutačných vzťahov (4.43). Pre  $\mathcal{A}$  maticu

dostávame:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \langle rpa | [\bar{A}, H, \bar{A}^\dagger] | rpa \rangle &= \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_{N_n} \langle N_n \rangle + \mathcal{A}_{N_p} \langle N_p \rangle \\
&+ \mathcal{A}_{N_p N_n} \langle N_p N_n \rangle + \mathcal{A}_{N_n N_n} \langle N_n N_n \rangle + \mathcal{A}_{N_p N_p} \langle N_p N_p \rangle \\
&+ \mathcal{A}_{A_{pn}^\dagger A_{pn}} \langle A_{pn}^\dagger A_{pn} \rangle + \mathcal{A}_{A_{pn} A_{pn}} \langle A_{pn} A_{pn} \rangle + \mathcal{A}_{B_{pn}^\dagger B_{pn}} \langle B_{pn}^\dagger B_{pn} \rangle \\
&+ \mathcal{A}_{A_{pp}^\dagger A_{pp}} \langle A_{pp}^\dagger A_{pp} \rangle + \mathcal{A}_{A_{nn}^\dagger A_{nn}} \langle A_{nn}^\dagger A_{nn} \rangle + \mathcal{A}_{A_{pp}^\dagger A_{nn}} \langle A_{pp}^\dagger A_{nn} \rangle \\
&+ \mathcal{A}_{A_{pp} A_{pp}} \langle A_{pp} A_{pp} \rangle + \mathcal{A}_{A_{nn} A_{nn}} \langle A_{nn} A_{nn} \rangle + \mathcal{A}_{A_{nn} A_{pp}} \langle A_{nn} A_{pp} \rangle,
\end{aligned} \tag{4.50}$$

kde je pre jednoduchosť použité označenie  $|rpa\rangle \equiv | \rangle$ . Ten istý vzťah (4.50) platí aj pre maticu  $\mathcal{B} = -\langle rpa | [\bar{A}, H, \bar{A}] | rpa \rangle$ , len so zámenou koeficientov  $\mathcal{A}_{\hat{O}} \rightarrow \mathcal{B}_{\hat{O}}$ ,  $\mathcal{A}_{\hat{O}_1 \hat{O}_2} \rightarrow \mathcal{B}_{\hat{O}_1 \hat{O}_2}$ . Explicitné vyjadrenia všetkých členov  $\mathcal{A}_{\hat{O}}$ ,  $\mathcal{A}_{\hat{O}_1 \hat{O}_2}$ ,  $\mathcal{B}_{\hat{O}}$ ,  $\mathcal{B}_{\hat{O}_1 \hat{O}_2}$  sú uvedené v dodatku C.3. Normovacia matica  $\mathcal{U}$  má tvar:

$$\mathcal{U} = \langle rpa | [\bar{A}, \bar{A}^\dagger] | rpa \rangle = 1 + \mathcal{U}_{N_n} \langle N_n \rangle + \mathcal{U}_{N_p} \langle N_p \rangle, \tag{4.51}$$

v ktorom

$$\mathcal{U}_{N_n} = \frac{V_n^2 - V_p^2 - 1}{2\Omega}, \quad \mathcal{U}_{N_p} = \frac{V_p^2 - V_n^2 - 1}{2\Omega}. \tag{4.52}$$

Všimnime si, že koeficienty  $\mathcal{A}_{\hat{O}}$ ,  $\mathcal{A}_{\hat{O}_1 \hat{O}_2}$ ,  $\mathcal{B}_{\hat{O}}$ ,  $\mathcal{B}_{\hat{O}_1 \hat{O}_2}$  a  $\mathcal{U}_{\hat{O}}$  obsahujú aj kvadratické členy  $V_p^2$ ,  $V_n^2$  (t.j.  $(v_n^2 - v_p^2)^2$  v menovateli). Prípadnú divergenciu FR-QRPA matic pri  $v_n^2 \rightarrow v_p^2$  môžu odstrániť len stredné hodnoty operátorov  $\langle N_n \rangle, \dots$ , uvedené v (4.50), ktoré závisia od vyjadrenia vlnovej funkcie  $|rpa\rangle$ .

Základný stav  $|rpa\rangle$  je určený z rovnice  $Q|rpa\rangle = 0$ . Pre tvar (4.47) operátora  $Q$ , však nevieme nájsť jej presné riešenie. Môžeme použiť približnú definíciu (2.61) a podobne ako v PP2-QRPA metóde [Š<sup>+</sup>00], obmedziť sa len na členy po druhú mocninu koeficientu  $d$  vo vyjadreniach príslušných RPA maticových elementov (pretože  $d < 1$ ). Pripomeňme, že v PP2-QRPA je potom dostatočný nasledovný tvar  $|rpa\rangle$  vlnovej funkcie

$$|rpa\rangle = \mathcal{N} (1 + d A_{pn}^\dagger A_{pn}^\dagger) |0\rangle, \quad d = \frac{Y}{2X\mathcal{U}}. \tag{4.53}$$

$\mathcal{N}$  je norma a  $\mathcal{U}$  je normovacia PP2-QRPA matica. V metóde FR-QRPA sa zdá prirodzené použitie rovnakého vyjadrenia stavu  $|rpa\rangle$  (4.53), len so zámenou  $A_{pn}^\dagger \rightarrow \bar{A}_{pn}^\dagger$ . Takto však nezískame jednoznačnú podmienku pre korelačný koeficient  $d$ , ktorá má vyplývať z riešenia rovnice  $Q|rpa\rangle = 0$ . Poznamenajme, že cez operátor  $\bar{A}_{pn}^\dagger$  do definície  $|rpa\rangle$  vchádzajú rozptylové členy  $B_{pn}^\dagger$ ,  $B_{pn}$ , ktoré spôsobujú spomenutú nejednoznačnosť faktora  $d$ . Preto navrhujeme zovšeobecnenú vlnovú funkciu, obsahujúcu okrem  $A_{pn}^\dagger$  aj rýdzo protónové ( $A_{pp}^\dagger$ ) a neutrónové ( $A_{nn}^\dagger$ ) komponenty:

$$|rpa\rangle = \mathcal{N} (1 + d A_{pn}^\dagger A_{pn}^\dagger + e A_{pp}^\dagger A_{pp}^\dagger + f A_{nn}^\dagger A_{nn}^\dagger) |0\rangle, \tag{4.54}$$

s novými koeficientami  $e$ ,  $f$  charakterizujúcimi protónové a neutrónové korelácie. Riešením podmienky  $Q|rpa\rangle = 0$  pre fonónový operátor (4.47) dostávame:

$$d = \frac{Y}{X(2-p)}, \quad e = \frac{YV_n - XV_p}{2(XV_n - YV_p)} d, \quad f = \frac{YV_p - XV_n}{2(XV_p - YV_n)} d, \tag{4.55}$$

kde pre jednoduchosť zavádzame označenie  $p \equiv 1/\Omega$ , ktoré budeme používať aj ďalej. Pri určení parametrov  $d, e, f$  boli zanedbané kubické členy z bifermiónových operátorov, ktorých stredné hodnoty v  $|rpa\rangle$  vákuu (4.54) sú nulové. Pomocou definícií (4.54) a (4.55) stavu  $|rpa\rangle$  vieme nájsť nasledovné vyjadrenia maticových elementov prítomných vo FR-QRPA maticiach  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{U}$ :

$$\begin{aligned}
\langle rpa|N_p|rpa\rangle &= \mathcal{N}^2 \{2(2-p)d^2 + 32(1-p)e^2\}, \\
\langle rpa|N_n|rpa\rangle &= \mathcal{N}^2 \{2(2-p)d^2 + 32(1-p)f^2\}, \\
\langle rpa|N_n N_n|rpa\rangle &= \mathcal{N}^2 \{4(2-p)d^2 + 128(1-p)f^2\}, \\
\langle rpa|N_p N_p|rpa\rangle &= \mathcal{N}^2 \{4(2-p)d^2 + 128(1-p)e^2\}, \\
\langle rpa|N_p N_n|rpa\rangle &= \mathcal{N}^2 4(2-p)d^2, \quad \langle rpa|A_{pn}A_{pn}|rpa\rangle = \mathcal{N}^2 (2-p)d, \\
\langle rpa|A_{pn}^\dagger A_{pn}|rpa\rangle &= \mathcal{N}^2 (4-4p+p^2)d^2, \\
\langle rpa|B_{pn}^\dagger B_{pn}|rpa\rangle &= \mathcal{N}^2 \{4p(1-p)d^2 + 16p(1-p)e^2\}, \\
\langle rpa|A_{pp}^\dagger A_{pp}|rpa\rangle &= \mathcal{N}^2 \{2p^2d^2 + 32(1-p)^2e^2\}, \\
\langle rpa|A_{nn}^\dagger A_{nn}|rpa\rangle &= \mathcal{N}^2 \{2p^2d^2 + 32(1-p)^2f^2\}, \\
\langle rpa|A_{pp}^\dagger A_{nn}|rpa\rangle &= \mathcal{N}^2 8p\{(p-1)df - (1+p)de\}, \\
\langle rpa|A_{pp}A_{pp}|rpa\rangle &= \mathcal{N}^2 8(1-p)e, \quad \langle rpa|A_{nn}A_{nn}|rpa\rangle = \mathcal{N}^2 8(1-p)f, \\
\langle rpa|A_{nn}A_{pp}|rpa\rangle &= -\mathcal{N}^2 2pd.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Normovací faktor  $\mathcal{N}$  je:

$$\mathcal{N}^{-2} = \{1 + (2-p)d^2 + 8(1-p)(e^2 + f^2)\}. \tag{4.57}$$

Keďže elementy (4.56) sú cez koeficienty  $d, e, f$  funkcie amplitúd  $X, Y$  (FR-QRPA riešení), systém modelových FR-QRPA rovníc sa rieši iteračne. Dodajme, že tvar PP2-QRPA vlnovej funkcie (4.53) je limitným prípadom FR-QRPA stavu (4.54) pri  $e = f = 0$ , avšak s iným vyjadrením faktora  $d$ . Maticové elementy (4.56) s dosadenými nulovými hodnotami  $e$  a  $f$  sú priamo vzorce pre PP2-QRPA elementy. Všimnime si, že tri z nich, konkrétne  $\langle rpa|A_{pp}^\dagger A_{nn}|rpa\rangle$ ,  $\langle rpa|A_{pp}A_{pp}|rpa\rangle$  a  $\langle rpa|A_{nn}A_{nn}|rpa\rangle$ , sú v tomto prípade nulové. RPA matice  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  a  $\mathcal{U}$  pre PP2-QRPA metódu získame z FR-QRPA matíc položením  $V_n = V_p = 0$  v jednotlivých členoch  $\mathcal{A}_{\hat{O}}, \mathcal{A}_{\hat{O}_1\hat{O}_2}, \mathcal{B}_{\hat{O}}, \mathcal{B}_{\hat{O}_1\hat{O}_2}, \mathcal{U}_{N_n}, \mathcal{U}_{N_p}$  pri stredných hodnotách operátorov (pozri vzťah (4.50)) a použitím vyššie spomenutých limitných prípadov maticových elementov (4.56). Koeficienty PP2-QRPA matíc  $\mathcal{A}_{\hat{O}}, \mathcal{A}_{\hat{O}_1\hat{O}_2}, \mathcal{B}_{\hat{O}}, \mathcal{B}_{\hat{O}_1\hat{O}_2}$  sú vypísané v dodatku C.3.

### 4.3.2 Numerické výpočty a výsledky

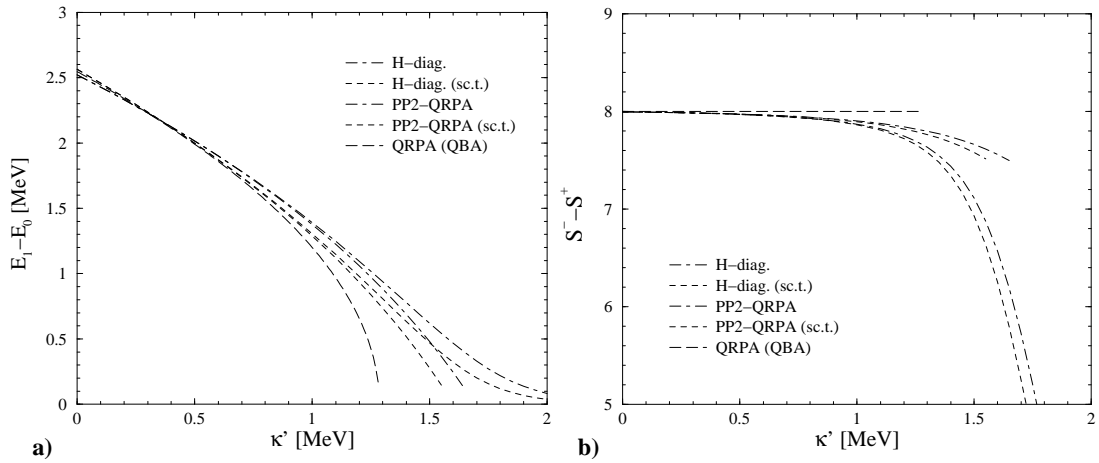
Všetky výpočty realizujeme v modeli s momentom hybnosti nukleónov  $j = 19/2$ . Energie protónových a neutrónových kvázičastíc volíme rovnaké:  $E_p = E_n = 1\text{MeV}$  a silu časticovo–dierovej interakcie berieme  $\chi' = 0.5\text{MeV}$ . Časticovo–časticová ( $p$ - $p$ ) sila  $\kappa'$  je ako obvykle považovaná za voľný parameter. Na výpočet  $2\nu\beta\beta$  maticového elementu uvažujeme jadrový prechod:  $(N = 14, Z = 6) \rightarrow (N =$



12,  $Z = 8$ ) a rozdiel energií základných hladín pôvodného a koncového jadra volíme  $\Delta = 0.5 \text{ MeV}$ .

Úlohu rozptylových členov  $B_{pn}^\dagger$ ,  $B_{pn}$ , prítomných v hamiltoniáne (4.40), sme študovali nielen vo výpočtoch jednoduchých  $\beta$ -prechodov a s nimi súvisiaceho Ike-dovho sumačného pravidla (ISR), ale aj na energii 1. vzbudného stavu mnohonukleónového systému a maticovom elemente  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu. Pre ilustráciu uvádzame obrázok 4.18, na ktorom je znázornená prvá excitačná energia ( $E_1 - E_0$ ) a test ISR pre exaktný a PP2-QRPA výpočet jednoduchých  $\beta$ -prechodov. Dodajme, že  $\beta^\pm$ -

Obrázok 4.18: Vplyv rozptylových členov hamiltoniánu (4.40) na výpočet excitačnej energie (a) a na test ISR (b) v exaktnom ( $H$ -diag.) a PP2-QRPA riešení. Výsledky s kompletným hamiltoniánom (4.40) sú označené (sc.t.). Ostatné hodnoty sú získané s vypnutými členmi  $B_{pn}^\dagger$ ,  $B_{pn}$  v  $H$ . Výpočet je uskutočnený pre systém  $(N, Z) = (14, 6)$ . QRPA (QBA) sú štandardné QRPA výsledky.



amplitúdy medzi základným a susedným prvým vzbudným stavom sú počítané pomocou príslušných prechodových operátorov (2.46) obsahujúcich aj rozptylové členy. Tieto však dávajú nulový vklad do  $\beta$ -amplitúd pri obložení uvažovanými vlnovými funkciami. Celkové sily jednoduchých  $\beta^\pm$ -rozpadov  $S^\pm$  majú spĺňať podmienku  $S^- - S^+ = N - Z$ , čo je ISR. Ukázalo sa, že napriek zahrnutiu operátorov  $B_{pn}^\dagger$ ,  $B_{pn}$  do modelového hamiltoniánu (4.40), v presnom a PP2-QRPA riešení nedochádza ani k čiastočnému obnoveniu platnosti ISR. Naopak, z grafu 4.18 b) vidíme, že riešenia s rozptylovými členmi sú pri veľkých hodnotách  $\kappa'$  viac odklonené od čísla  $N - Z$  ako výsledky bez daných operátorov v hamiltoniáne. Obrázok 4.18 a) ukazuje malý vplyv operátorov  $B_{pn}^\dagger$ ,  $B_{pn}$  na výpočet excitačnej energie mnohonukleónového systému. V prípade PP2-QRPA metódy spôsobujú členy  $B_{pn}^\dagger$ ,  $B_{pn}$  posunutie kolapsu riešenia do menších hodnôt p-p interakcie  $\kappa'$ , zrejme vďaka väčšiemu počtu korelácií v RPA základnom stave.

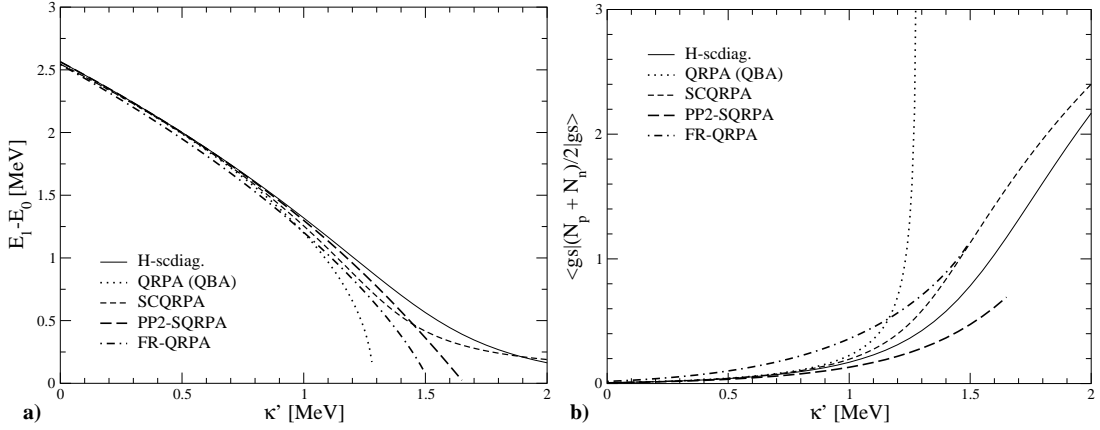
Obnovenie platnosti ISR teda nie je záležitosťou doplnenia zanedbaných rozptylových operátorov pri prechode do kvázičasticovej reprezentácie modelového hamiltoniánu, skôr sa bude zakladať na lepšom zabezpečení zachovania počtu častíc pri BCS transformácii. Túto požiadavku realizujú „self-konzistentné” podmienky

(4.49), pomocou ktorých sú v rámci uvažovaných metód (či už QRPA alebo diagonalizácia  $H$ ) modifikované BCS amplitúdy  $u_\tau, v_\tau$ , ( $\tau = p, n$ ). Pri exaktných výpočtoch samozrejme nahradíme stav  $|rpa\rangle$  vo vzťahoch (4.49) presným základným stavom  $|g.s.exact\rangle$ , ktorý má štruktúru (4.26). „Self-konzistentná” schéma exaktných výpočtov potom znamená: v iteračných cykloch diagonalizovať hamiltonián  $H$ , počítať stredné hodnoty  $\langle g.s.exact | N_\tau | g.s.exact \rangle$  a meniť BCS faktory  $u_\tau, v_\tau$  tak, aby spĺňali podmienky (4.49) až kým sa nedosiahne konvergencia hodnôt  $u_\tau, v_\tau$ . Poznamenajme, že aj samotná FR-QRPA metóda nemá význam bez uvedenej modifikácie BCS amplitúd  $u_\tau, v_\tau$ . Bez nej totiž FR-QRPA nezabezpečí platnosť ISR ani pomocou špeciálnej definície fonónového operátora (4.47).

Realizácia „self-konzistentných” exaktných a PP2-QRPA výpočtov viedla k úplnému zachovaniu ISR. V prípade presných výpočtov je ISR splnené až pri uvažovaní  $\beta$ -prechodov do všetkých vzbudných stavov, ktoré diagonalizáciou získame. Je to prirodzený výsledok vzhľadom na pôvodnú definíciu (2.38) Ikedovho sumačného pravidla, kde vystupuje suma všetkých možných  $\beta$ -síl. V „self-konzistentnej” PP2-QRPA metóde je ISR úplne splnené preto, lebo počítame Fermiho  $\beta$ -prechody (pri ktorých sú rovnaké protónové a neutrónové hustoty kvázičasticových stavov). Ako bolo povedané v kapitole 2.2.2, pri opise Gamow-Tellerových prechodov korektnejší výpočet BCS amplitúd, modifikovaných v QRPA, nestačí na zabezpečenie zachovania ISR. Tento problém rieši FR-QRPA. Spoločnou črtou „self-konzistentne” určených BCS vlnových funkcií v presnej a PP2-QRPA metóde je, že s rastúcou  $p$ - $p$  silou  $\kappa'$  sa tieto výrazne odlišujú od štartovacích hodnôt (používaných v pôvodných výpočtoch bez redefinície  $u_\tau, v_\tau$ ). Podstatná zmena BCS amplitúd je dôležitá práve pri veľkej  $p$ - $p$  interakcii  $\kappa'$ , pretože tam sa pozoruje najväčšie narušenie ISR pôvodnými metódami.

Venujme sa teraz FR-QRPA výpočtom. Iteračným postupom s použitím vzorcov odvodených v predchádzajúcej časti sme našli riešenie FR-QRPA rovníc v modelovom priestore definovanom na začiatku tejto kapitoly. Aby sme videli efekt, ktorý vnáša do FR-QRPA výsledkov úplná renormalizácia fonónového operátora (4.47) univerzálne zabezpečujúca platnosť ISR, porovnáme získané výsledky s hodnotami vypočítanými v dostupných metódach so „self-konzistentnou” modifikáciou BCS amplitúd  $u_\tau, v_\tau$ . Na obrázku 4.19 je znázornená excitačná energia ( $E_1 - E_0$ ) (graf a)) a stredná hodnota polovičného počtu kvázičastíc  $(N_n + N_p)/2$  v základnom stave (graf b)) získaná vo FR-QRPA pre jadrový systém  $(N, Z) = (14, 6)$  ako funkcia parametra  $\kappa'$ . Presné a PP2-QRPA výpočty so „self-konzistentnými” podmienkami označujeme ako *H-scdiag* a *PP2-SQRPA*. Okrem týchto a FR-QRPA riešení sú v grafoch 4.19 uvedené aj *SCQRPA* („self-konzistentné” RQRPA) a štandardné QRPA (QBA) výsledky. Vo všetkých modelových výpočtoch je použitý kompletný hamiltonián (4.40). Hneď na začiatku treba uviesť, že FR-QRPA riešenie kolabuje pri istej hodnote  $\kappa'$ , ktorá je väčšia ako v prípade štandardnej QRPA metódy a menšia ako v PP2-SQRPA modeli. FR-QRPA predpoveď excitačnej energie je s malým posunutím podobná PP2-SQRPA výsledkom. Rovnako, ako všetky ostatné priblíženia, aj FR-QRPA podhodnocuje exaktnú excitačnú energiu v oblasti veľkej sily  $\kappa'$  a mierne aj pri malej  $p$ - $p$  interakcii. V prípade strednej hod-

Obrázok 4.19: Prvá excitačná energia (a) a stredná hodnota polovičného počtu kvázičastíc v základnom stave (b) v závislosti od parametra  $\kappa'$ . *H-scdiag.* a *PP2-SQRPA* sú exaktné a *PP2-QRPA* „self-konzistentné” výpočty. *SCQRPA* sú „self-konzistentné” RQRPA výsledky a *QRPA (QBA)* je štandardný QRPA výpočet. Základný stav  $|gs\rangle$  je buď  $|rpa\rangle$  alebo  $|g.s.exact\rangle$ .



noty operátora  $(N_n + N_p)/2$  v základnom stave (graf 4.19 b)) FR-QRPA metóda produkuje najväčší počet kvázičastíc zo všetkých metód v celej oblasti svojej existencie (ak neberieme do úvahy kolapsový výsledok QRPA (QBA)). Predpokladáme, že je to spôsobené pridaním nových neutrónových a protónových komponentov do vlnovej funkcie (4.54), ktoré nie sú prítomné v exaktnom stave  $|g.s.exact\rangle$ . Väčšie korelácie v základnom stave než sú presné hodnoty, majú aj SCQRPA a QRPA (QBA) priblíženia. Ako vieme, tieto metódy nie sú citlivé na prítomnosť rozptylových členov v hamiltoniáne (4.40). PP2-SQRPA jediná podhodnocuje presný počet kvázičastíc. Pripomeňme, že jej vlnová funkcia  $|rpa\rangle$  obsahuje len operátory  $A_{pn}^\dagger$ , rovnako ako exaktný stav  $|g.s.exact\rangle$ .

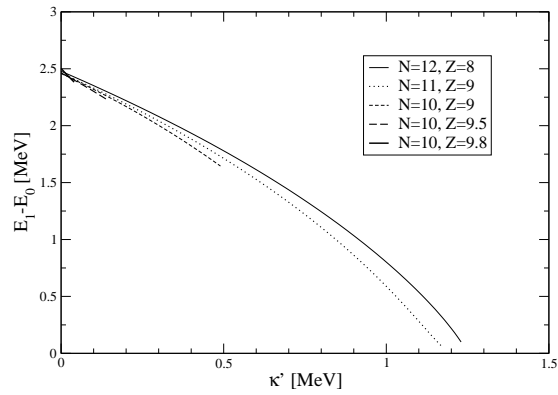
Vráťme sa teraz k problému divergencie FR-QRPA metódy v situácii  $v_p \rightarrow v_n$ . V schématických výpočtoch je  $v_p \rightarrow v_n$  ekvivalentné podmienke  $Z \rightarrow N$ . Ak vyšetríme tento prípad, zistíme, že FR-QRPA metóda s definovaným základným stavom (4.54) pri  $N = Z$  diverguje - nie je možné nájsť riešenia FR-QRPA systému ani pri vypnutej  $p$ - $p$  interakcii  $\kappa'$ . Situácia je objasnená na grafe 4.20, kde študujeme správanie sa FR-QRPA excitačnej energie pri znižovaní rozdielu  $N - Z$ .

Vidíme, že s približovaním sa počtu neutrónov k počtu protónov dochádza k posúvaniu kolapsu FR-QRPA riešenia do menších hodnôt  $\kappa'$ , postupne až ku  $\kappa' = 0$  MeV v prípade  $N = Z$ . Stav (4.54) teda nedokáže cez stredné hodnoty operátorov eliminovať nežiadúce členy typu  $1/(v_n^2 - v_p^2)^k$  v koeficientoch pochádzajúcich z presného výpočtu komutátorov z FR-QRPA matíc. Na mieste je otázka, či sa uvedený problém divergencie dá odstrániť, ak vo FR-QRPA vlnovej funkcii (4.54) vypneme netypické protónové a neutrónové korelácie ( $e = f = 0$ ) a vezmeme do úvahy len člen s operátorom  $A_{pn}^\dagger$ . Samozrejme takáto vlnová funkcia je len hrubou aproximáciou z hľadiska splnenia QRPA podmienky  $Q|rpa\rangle = 0$ , ale môže vypovedať o tom, nakoľko dôležitá je prítomnosť operátorov  $A_{\tau\tau}^\dagger$  ( $\tau = p, n$ ) vo FR-QRPA

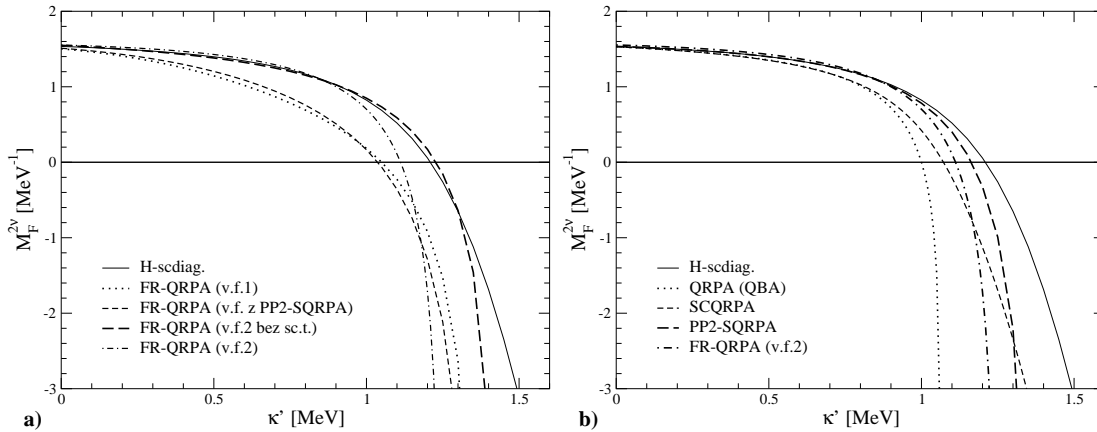
základnom stave. Ak do FR-QRPA matíc dosadíme stredné hodnoty príslušných operátorov, počítané v limite  $e = f = 0$ , získame model, ktorý je tiež problematický pri opise systému s  $N = Z$ . To znamená, že konvergenciu FR-QRPA metódy pri podmienke  $v_p \rightarrow v_n$  zrejme nedokážeme ovplyvniť tvarom základného stavu  $|rpa\rangle$ . Skôr bude treba uvažovať približný výpočet dvojných komutátorov, ktorý povedie ku konečným hodnotám FR-QRPA matíc v prípade  $v_p \rightarrow v_n$ .

Otázka použitia prezentovanej FR-QRPA metódy (s presným výpočtom komutátorov v RPA maticiach a s definíciou (4.54) základného stavu  $|rpa\rangle$ ) na opis excitácií v jadrách s rovnakým počtom protónov a neutrónov teda ostáva otvorená. Daný nedostatok ale nie je podstatný pri schématických výpočtoch  $2\nu\beta\beta$ -prechodov, ktoré študujeme na jadrových systémoch s nadbytkom neutrónov. Aplikujeme preto uvedenú FR-QRPA metódu na určenie Fermiho maticového elementu  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu ( $M_F^{2\nu}$ ), ktorý je definovaný rovnicou (2.63). Zvolený jadrový prechod a parametre modelového priestoru sú spomenuté na začiatku kapitoly. V nasledujúcich grafoch 4.21 je zobrazený maticový element  $M_F^{2\nu}$  vypočítaný v rámci FR-QRPA s rôznymi RPA vlnovými funkciami (graf a)) a porovnaný s ostatnými modelovými výpočtami (graf b)), ktoré sme uviedli pri obrázku 4.19. Vo FR-

Obrázok 4.20: Prvá excitačná energia počítaná v rámci FR-QRPA ako funkcia  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa'$ . Ukázané sú prípady zmenšujúceho sa rozdielu neutrónov ( $N$ ) a protónov ( $Z$ ) v modeli s  $j = 19/2$ .



Obrázok 4.21: Fermiho maticový element  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu v závislosti od sily  $\kappa'$ . (a) je porovnanie FR-QRPA výpočtov s rôznymi vlnovými funkciami diskutovanými v texte, (b) je porovnanie FR-QRPA výsledkov s vlnovou funkciou (4.54) s hodnotami z ostatných uvažovaných metód s rovnakým označením ako v obrázku 4.19.



QRPA sú na výpočet matíc použité dva tvary RPA vlnovej funkcie: (i) základný stav (4.54), ktorý je označený ako *v.f.2*, (ii) jeho limitný prípad s vypnutými protónovými a neutrónovými časťami  $e = f = 0$  (s označením *v.f.1*). Z grafu 4.21 a) vidíme, že uvažované stavy vo FR-QRPA vedú na výrazne odlišné výsledky. Zahrnutie rýdzo protónových a neutrónových členov do vlnovej funkcie  $|rpa\rangle$  má stabilizujúci účinok na predpovedaný element  $M_F^{2\nu}$ . Z iného hľadiska zasa väčší počet korelácií spôsobuje kolaps danej metódy skôr, ako pri použití jednoduchšieho stavu *v.f.1* len s protón–neutrónovými členmi. Keďže však FR-QRPA riešenia kolabujú v oboch prípadoch až za kolapsom štandardnej QRPA metódy (teda mimo fyzikálnej oblasti interakcie  $\kappa'$ ), je stabilita  $M_F^{2\nu}$  elementov dôležitejšia, čo favorizuje použitie všeobecnejšej vlnovej funkcie *v.f.2*.

Na konci predchádzajúcej časti sme spomenuli, že tvar vlnovej funkcie, ktorý teraz označujeme ako *v.f.1*, je zhodný s PP2-SQRPA základným stavom. Rozdielne sú len korelačné koeficienty  $d$  (sú určené na základe rôznych fonónových operátorov). PP2-SQRPA vlnová funkcia ako jediná spôsobila podhodnotenie exaktného množstva korelácií v základnom stave (obrázok 4.19 b)). Preto nás zaujímalo, či použitie danej vlnovej funkcie v rámci FR-QRPA neumožní posunutie kolapsu FR-QRPA riešenia do vyšších hodnôt  $\kappa'$  vďaka menšiemu počtu korelácií pri veľkej sile  $\kappa'$  a nakoľko bude takéto FR-QRPA priblíženie odlišné od modifikácie *FR-QRPA v.f.1*. V grafe 4.21 a) preto uvádzame FR-QRPA metódu, v ktorej stredné hodnoty operátorov RPA matíc nahrádzame hodnotami vypočítanými v modeli PP2-SQRPA (označenie *FR-QRPA (v.f. z PP2-SQRPA)*). Získané výsledky pre  $M_F^{2\nu}$  skutočne kolabujú ďalej ako výpočty s vlnovou funkciou *v.f.2*. Sú však menej stabilné a len málo odlišné od FR-QRPA výpočtov s vlnovou funkciou *v.f.1*. To znamená, že principiálne rôzne hodnoty korelačných koeficientov  $d$  v stavoch PP2-SQRPA a *v.f.1* nespôsobujú veľmi odlišné výsledky pre  $M_F^{2\nu}$ .

Úlohu rozptylových členov v metóde FR-QRPA môžeme ohodnotiť pomocou výpočtov s protón–neutrónovým Lipkinovým hamiltoniánom, t.j. uvažujeme len prvý riadok vo vzťahu (4.40). Táto modifikácia FR-QRPA je v grafe 4.21 a) označená *FR-QRPA (v.f.2 bez sc.t.)*. Na rozdiel od presnej a PP2-QRPA metódy, kde sa ukázal malý vplyv operátorov  $B_{pn}^\dagger$ ,  $B_{pn}$  na získané energie a jednoduché  $\beta$ –prechody (grafy 4.18), v prípade FR-QRPA výpočtu  $2\nu\beta\beta$  maticového elementu s použitím Lipkinovho hamiltoniánu, registrujeme významné zlepšenie predpovede exaktných hodnôt  $M_F^{2\nu}$  pri veľkej sile  $\kappa'$ . Kolaps FR-QRPA riešenia bez rozptylových členov pritom nastáva vo väčšej hodnote  $\kappa'$  ako v prípade ich zahrnutia do modelového hamiltoniánu. Rovnaký, ale menej výrazný vplyv operátorov  $B_{pn}^\dagger$ ,  $B_{pn}$  na kolaps výpočtov sme pozorovali aj pri PP2-QRPA metóde (obrázok 4.18). FR-QRPA modifikácia s vlnovou funkciou *v.f.2* a bez rozptylových členov hamiltoniánu sa javí ako najlepšia v reprodukcii exaktných hodnôt  $M_F^{2\nu}$  zo všetkých prezentovaných možností. Uvedené hodnotenie FR-QRPA metód však môže byť mierne skreslené. Na úplne korektné porovnanie prezentovaných priblížení by bolo treba nájsť exaktné riešenie založené na diagonalizácii hamiltoniánu (4.40) v báze všeobecnejších stavov, obsahujúcich aj operátory  $A_{\tau\tau}^\dagger$  ( $\tau = p, n$ ), keďže tieto sú prítomné tiež vo FR-QRPA vlnovej funkcii *v.f.2* (vzťah (4.54)).

Na poslednom obrázku 4.21 b) porovnáваме FR-QRPA výpočet elementu  $M_F^{2\nu}$  s použitím základného stavu (4.54) s výsledkami ostatných, skôr uvedených jadrové–štruktúrnych metód. Z hľadiska kolapsu je dané FR-QRPA priblíženie lepšie len od štandardnej QRPA predpovede. Vieme však, že to nie je artefakt prezentovanej FR-QRPA metódy, ale dôsledok rozptylových členov hamiltoniánu. Na ich prítomnosť je QRPA a SCQRPA necitlivá. Operátory  $B_{pn}^\dagger, B_{pn}$  síce posúvajú kolaps FR-QRPA riešenia do menších hodnôt  $\kappa'$ , ale nezhoršujú stabilitu získaných elementov  $M_F^{2\nu}$  v oblasti pred samotným kolapsom výpočtov. Vidíme, že QRPA (QBA) a SCQRPA výsledky sú menej stabilné voči zmene parametra  $\kappa'$  ako FR-QRPA a PP2-SQRPA hodnoty.

Na záver môžeme povedať, že najlepšie správanie pri veľkej  $p$ - $p$  interakcii  $\kappa'$  z hľadiska reprodukcie exaktných výsledkov vykazuje PP2-SQRPA metóda a FR-QRPA *v.f.2* výpočet bez rozptylových členov v hamiltoniáne. Diskutabilné je, ako by sa zmenilo exaktné riešenie, a tým aj hodnotenie úspešnosti jednotlivých QRPA metód, ak by sa našiel spôsob diagonalizácie hamiltoniánu (4.40) vo všeobecnejšej báze definovaných stavov ako dosiaľ.

Zhrňme teraz výsledky tejto kapitoly:

- (i) Uvažovali sme schématický model (4.40) s  $SO(5)$  symetriou, v ktorom sú zahrnuté tzv. rozptylové členy  $B_{pn}^\dagger, B_{pn}$ . Bol nájdený postup diagonalizácie príslušného hamiltoniánu v bežne používanej báze stavov  $(A_{pn}^\dagger)^k|0\rangle$  a odvodené presné riešenia pre veličiny, ktoré sú predmetom záujmu. Študovali sme úlohu operátorov  $B_{pn}^\dagger, B_{pn}$  v exaktných a PP2-QRPA  $[\check{S}^+00]$  výpočtoch excitačnej energie a následne aj ich vplyv na zachovanie Ikedovho sumačného pravidla (ISR) pri určovaní jednoduchých  $\beta$ -prechodov.
- (ii) Ukázalo sa, že prítomnosť členov  $B_{pn}^\dagger, B_{pn}$  v modelovom hamiltoniáne nemá výrazný dosah na presné a PP2-QRPA výsledky pre  $\beta$ -amplitúdy a nespôsobuje ani čiastočné obnovenie platnosti ISR v týchto metódach. Splnenie ISR však možno doceliť „self-konzistentnou“ podmienkou modifikujúcou BCS amplitúdy na úrovni uvažovaných metód, nezávisle od prítomnosti rozptylových členov v modelovom hamiltoniáne.
- (iii) Navrhli sme originálny základný stav  $|rpa\rangle$  pre *Plne renormalizovanú QRPA* (FR-QRPA) metódu [RF02], ktorý umožnil vyjadriť jej RPA matice (s presným výpočtom dvojných komutátorov) a získať vôbec prvé numerické riešenie FR-QRPA systému rovníc. FR-QRPA vlnová funkcia obsahuje (okrem štandardných) nové rýdzo protónové a neutrónové korelácie, ktoré sú vo FR-QRPA dôležité na zabezpečenie stability počítaného  $2\nu\beta\beta$  maticového elementu.
- (iv) Boli študované viaceré modifikácie FR-QRPA líšiace sa použitím rôznych vlnových funkcií  $|rpa\rangle$  približne splňajúcich QRPA podmienku pre základný stav. Zistili sme, že FR-QRPA metódy s presným výpočtom dvojných komutátorov v RPA maticiach a s uvažovanými definíciami základného stavu

$|rpa\rangle$  nie je možné aplikovať na opis mnohonukleónového systému s rovnakým počtom protónov a neutrónov.

### 4.3.3 Diskusia

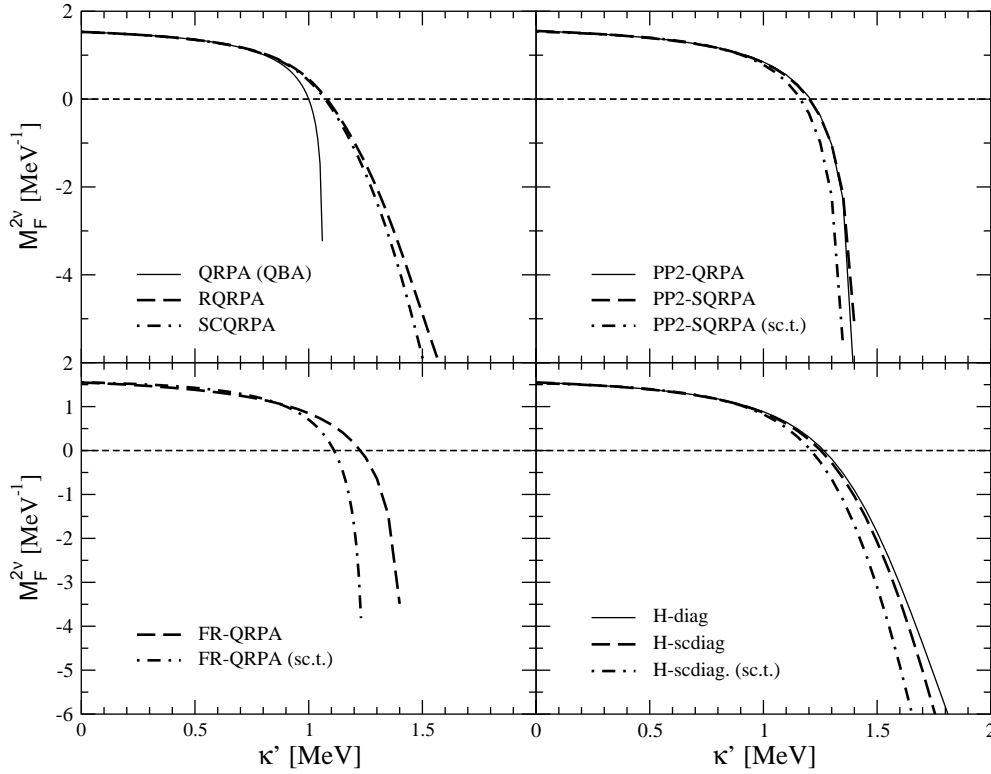
Realistické výpočty  $2\nu\beta\beta$  maticových elementov prevádzané štandardným alebo renormalizovaným QRPA priblížením sú vďaka používaným aproximáciám necitlivé na rozptylové členy  $B_{pn}^\dagger$ ,  $B_{pn}$  v hamiltoniáne. Preto sa tieto neuvažujú. V daných QRPA metódach sa tak pracuje len s reprezentáciou tvorenou operátormi  $A_{pn}^\dagger$ ,  $A_{pn}$  (pozri vzťahy (4.42)). Uvedený prístup však nemusí byť správny, ak chceme použiť QRPA modifikáciu, ktorá ide za rámec QRPA a RQRPA priblížení a jej RPA matice môžu mať nenulové príspevky od členov  $B_{pn}^\dagger$ ,  $B_{pn}$ .

V tejto kapitole sme pomocou SO(5) schématického modelu skúmali význam operátorov  $B_{pn}^\dagger$ ,  $B_{pn}$  v dokonalejších QRPA metódach v porovnaní s QRPA a RQRPA, ale aj v presnom riešení danom diagonalizáciou modelového hamiltoniánu. Pôvodný predpoklad o potrebe rozptylových členov v hamiltoniáne na rekonštrukciu Ikedovho sumačného pravidla (ISR) sa nepotvrdil v presných ani PP2-QRPA [Š<sup>+</sup>00] výpočtoch. Operátory  $B_{pn}^\dagger$ ,  $B_{pn}$  pritom spôsobujú len malé zmeny počítaných energií a  $\beta$ -prechodov. Dodajme, že PP2-QRPA je metóda, ktorá ide za rámec RQRPA aproximácie a v jej modelových maticiach sa uplatňujú aj členy  $B_{pn}^\dagger$ ,  $B_{pn}$ , podobne ako v exaktnom riešení. Výsledkom nášho skúmania je, že platnosť ISR sa dá zabezpečiť v rámci daného (PP2-QRPA, alebo presného) postupu „self-konzistentným“ výpočtom jednoduchých  $\beta$ -prechodov. Tento spôsob však nie je univerzálny. Presnú platnosť ISR garantuje len v prípade rovnakých protónových a neutrónových hustôt kvázičasticových stavov.

Princíp *Plne renormalizovanej QRPA* metódy (FR-QRPA) je navrhnutý tak, že jednoduché  $\beta$ -amplitúdy počítané v rámci FR-QRPA spĺňajú ISR univerzálne (nezávisle od rovnosti protónových a neutrónových kvázičasticových hustôt). Vôbec prvé numerické riešenie FR-QRPA systému rovníc ukázalo, že význam rozptylových členov vo FR-QRPA nie je marginálny, ale značne ovplyvňuje správanie sa počítaného  $2\nu\beta\beta$  maticového elementu ( $M_F^{2\nu}$ ) v oblasti veľkej časticovo-časticovej ( $p$ - $p$ ) interakcie. Ďalej pre stabilitu hodnôt  $M_F^{2\nu}$  sú dôležité rýdzo protónové a neutrónové korelácie v základnom stave FR-QRPA. Tieto fakty treba brať do úvahy pri snahách o uskutočnenie realistických FR-QRPA výpočtov. Dosať QRPA vlnové funkcie obsahovali len členy  $A_{pn}^\dagger$ . Vychádzajúc zo získaných výsledkov (pozri graf 4.21 a)) môžeme povedať, že zahrnutie operátorov  $A_{\tau\tau}^\dagger$ , ( $\tau = p, n$ ) do vlnovej funkcie  $|rpa\rangle$  môže výrazne prispieť k stabilite QRPA predpovedí realistických  $2\nu\beta\beta$  maticových elementov v oblasti veľkej  $p$ - $p$  interakcie. Poznamenajme, že definícia (4.54) základného stavu  $|rpa\rangle$  nie je žiadnym spôsobom obmedzená len na použitý schématický model a dá sa uplatniť aj v reálnom prípade. Formálny analytický výpočet FR-QRPA matíc pomocou stavu (4.54) v realistickom mnohovrstvovom modeli nie je problémový. Ako sme však skôr uviedli, FR-QRPA metóda je nepoužiteľná na opis jadra s  $N = Z$ , respektíve ak pre BCS amplitúdy platí  $v_n = v_p$ . Divergencia RPA matíc sa nedá odstrániť pomocou žiadneho z

uvažovaných základných stavov. Tento problém ostáva zatiaľ otvorený a je výzvou pre ďalšie štúdium, či už na schematickej alebo realistickej úrovni.

Obrázok 4.22: Úloha vplyvu „self-konzistentnej“ podmienky (4.49) a rozptylových členov  $B_{pn}^\dagger$ ,  $B_{pn}$  hamiltoniánu na výsledok v QRPA, PP2-QRPA, FR-QRPA a presných výpočtoch  $2\nu\beta\beta$  maticového elementu.



V rámci diskusie uvádzame prehľad všetkých uvažovaných QRPA výpočtov maticového elementu  $M_F^{2\nu}$  (obrázok 4.22). Je demonštrovaný vplyv rozptylových členov hamiltoniánu na výsledky a modifikácia riešení pri použití „self-konzistentnej“ schémy zabezpečujúcej splnenie ISR v danom modeli. Význam použitého označenia jednotlivých metód je zrejímavý z komentárov k výsledkom z predchádzajúcej časti. Ľavý horný graf obrázku 4.22 obsahuje QRPA priblíženia, ktoré sa používajú v súčasných realistickej výpočtoch  $2\nu\beta\beta$  maticových elementov a sú necitlivé na prítomnosť rozptylových členov v hamiltoniáne. Pri metóde FR-QRPA (ľavý dolný graf) zasa nemá zmysel uvádzať FR-QRPA modifikáciu bez „self-konzistentnej“ podmienky, keďže aj pomocou nej FR-QRPA univerzálne zabezpečuje zachovanie ISR. V prípade presných a PP2-QRPA výpočtov (grafy vpravo dole a hore) máme možnosť porovnať všetky tri varianty daných metód (t.j. základný model + „self-konzistentná“ podmienka + rozptylové členy v hamiltoniáne). Vidíme, že jednotlivé modifikácie exaktného a PP2-QRPA riešenia sa pri predpovedi hodnôt  $M_F^{2\nu}$  výrazne nelíšia.

Záverom z prezentovaných štúdií je fakt, že úloha rozptylových členov hamiltoniánu v QRPA modifikáciách je rôzna a závisí od konkrétnej QRPA metódy



(spôsobu výpočtu RPA matic). Preto pri realistických výpočtoch jednoduchých a dvojitých  $\beta$ -prechodov s použitím QRPA priblíženia idúceho za rámec súčasných aproximácií (RQRPA, SCQRPA) je potrebné preveriť význam operátorov  $B_{pn}^\dagger$ ,  $B_{pn}$  pre danú QRPA metódu (napríklad v schématickom modeli) a v prípade potreby ich uvažovať v použitom jadrovom hamiltoniáne.

## 4.4 Greenove funkcie $\beta\beta$ -rozpadu v integrálnej reprezentácii

V kapitole 2.1.2 bola pri odvodení amplitúdy  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu uvedená alternatívna možnosť výpočtu Fermiho a Gamow–Tellerovho maticového elementu  $2\nu\beta\beta$ -procesu v integrálnej reprezentácii (vzťahy (2.15) a (2.16)). Výhodou týchto definícií je, že neobsahujú úplnú sústavu vzbudených stavov a energií prechodového jadra z  $\beta\beta$ -premeny. Na konštrukciu daných elementov potrebujeme poznať len základný stav pôvodného a výsledného jadrového systému a časový vývoj (2.17) jednoduchých  $\beta$ -prechodových operátorov. Z hľadiska opisu jadrovej štruktúry teda nie je integrálny výpočet  $2\nu\beta\beta$  Greenových funkcií tak náročný ako bežne používaný postup so sumovaním cez intermediálne stavy (vzťahy (2.18) a (2.19)).

Dôležitým bodom výpočtu  $2\nu\beta\beta$  maticového elementu v integrálnej reprezentácii je určenie časových závislostí  $\beta$ -prechodových operátorov pomocou vzorca (2.27). Je nutné získať ich analytické vyjadrenia kvôli následnej integrácii cez časovú koordinátu. Keďže ide o sumu nekonečného počtu operátorov, daný výpočet nie je jednoduchý. V realistickom prípade (Metóda expanzie prechodového operátora, kapitola 2.2.4) sa časová závislosť  $\beta$ -operátorov určuje len približne na základe aproximačných požiadaviek bližšie špecifikovaných v časti 2.2.4.

V tejto kapitole prezetujeme schématický výpočet síl jednoduchých  $\beta$ -prechodov a Fermiho maticového elementu  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu v integrálnej reprezentácii. V rámci približného bozónového obrazu protón–neutrónového Lipkinovho modelu sme našli spôsob, ktorý umožňuje s daným modelovým hamiltoniánom presný výpočet časových vývojov  $\beta$ -operátorov a následne aj Greenovej funkcie  $2\nu\beta\beta$ -prechodu. Dodajme, že integrálne vyjadrenie maticového elementu  $2\nu\beta\beta$ -premeny nie je zaťažené dvojjákuovým problémom pozorovaným pri QRPA výpočtoch daného procesu. Netradičné určenie  $2\nu\beta\beta$  Greenových funkcií v integrálnom tvare tak môže pomôcť pri hodnotení vplyvu dvojjákuovej neurčitosti na výsledok.

### 4.4.1 Fyzikálna zložka maticového elementu $\beta\beta$ -prechodu

Integrálne výpočty jednoduchých  $\beta$ -sí a maticového elementu  $2\nu\beta\beta$ -prechodu realizujeme v bozónovom priestore. Použijeme hamiltonián definovaný rovnicou (4.1) s ohraničením na kvadratické členy z bozónových operátorov  $B^\dagger$ ,  $B$ :

$$H_B = \alpha_{11}B^\dagger B + \alpha_{02}(B^\dagger B^\dagger + BB), \quad \alpha_{11} = (2\epsilon + \lambda_1), \quad \alpha_{02} = \lambda_2 \sqrt{1 - \frac{1}{2\Omega}}. \quad (4.58)$$

Od štandardného QBA hamiltoniánu (4.8) sa tvar (4.58) odlišuje presnejším určením koeficientu  $\alpha_{02}$ . Pripomeňme, že bozónová reprezentácia  $H_B$  (4.58) bola získaná Marumoriho mapovaním (pozri dodatok B) z protón–neutrónového Lipkinovho modelu (2.48). V uvažovanom schématickom modeli sú možné len Fermiho  $\beta$ –prechody. Pre bozónový obraz  $\beta^\pm$ –operátorov (2.64) v čase  $t = 0$  platí:

$$\beta_B^-(0) = \sqrt{2\Omega}(u_p v_n \mathcal{O}_B^\dagger + v_p u_n \mathcal{O}_B), \quad \beta_B^+(0) = (\beta_B^-(0))^\dagger, \quad (4.59)$$

kde

$$\mathcal{O}_B^\dagger = B^\dagger + \alpha_{21} B^\dagger B^\dagger B + \alpha_{32} B^\dagger B^\dagger B^\dagger B + \dots, \quad \mathcal{O}_B = (\mathcal{O}_B^\dagger)^\dagger, \quad (4.60)$$

a koeficienty  $\alpha_{21}$  a  $\alpha_{32}$  sú definované v (4.11). Poznamenajme, že v štandardných QRPA výpočtoch  $2\nu\beta\beta$  maticových elementov sú vyššie členy z bozónovej expanzie (4.60) (úmerné  $\alpha_{21}$ ,  $\alpha_{32}$ ) zanedbané.

Definíciu Fermiho maticového elementu  $2\nu\beta\beta$ –rozpadu píšeme v analógii s odvodeným vzťahom (2.15) nasledovne:

$$M_F^{2\nu} = \langle 0_f^+ | \frac{i}{2} \int_0^\infty [\beta_B^-(t/2), \beta_B^-(-t/2)] dt | 0_i^+ \rangle. \quad (4.61)$$

$|0_i^+\rangle$  ( $|0_f^+\rangle$ ) je základný stav pôvodného (výsledného) jadra a časový vývoj  $\beta_B^\pm$ –operátorov je

$$\beta_B^\pm(t) = e^{iH_B t} \beta_B^\pm(0) e^{-iH_B t}. \quad (4.62)$$

Vieme ho vyjadriť ako sumu nekonečného počtu mnohonásobných komutátorov operátorov  $H_B$  a  $\beta_B^\pm(0)$  (pozri vzťah (2.27)).

Pre celkové sily jednoduchých  $\beta^\pm$ –prechodov (zo stavu  $|0\rangle$  do všetkých susedných vzbudených stavov) v integrálnom tvare platí:

$$S_{\beta^\pm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega t} \langle 0 | \beta_B^\mp(-t/2) \beta_B^\pm(t/2) | 0 \rangle dt, \quad (4.63)$$

pričom  $\omega = E_n - E_0$  je rozdiel energií koncového ( $n$ –tého) a počiatočného stavu pri danej  $\beta$ –premene. Vzťah (4.63) získame prepisom pôvodnej definície  $\beta$ –sily s použitím integrálneho vyjadrenia  $\delta$ –funkcie, podmienky úplnosti  $\sum_n |n\rangle \langle n| = 1$  a predpokladu, že energie  $E_n$ ,  $E_0$  sú vlastné hodnoty hamiltoniánu  $H_B$ :

$$\begin{aligned} S_{\beta^\pm} &= \sum_n |\langle n | \beta_B^\pm(0) | 0 \rangle|^2 \delta(E_n - E_0 - \omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \sum_n e^{i(E_n - E_0 - \omega)t} \langle 0 | (\beta_B^\pm(0))^\dagger | n \rangle \langle n | \beta_B^\pm(0) | 0 \rangle dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega t} \langle 0 | \beta_B^\mp(0) \beta_B^\pm(t) | 0 \rangle dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega t} \langle 0 | \beta_B^\mp(-t/2) \beta_B^\pm(t/2) | 0 \rangle dt. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Časovú závislosť  $\beta$ –operátorov (definovaných vzťahom (4.62) a obsahujúcu nekonečný počet mnohonásobných komutátorov  $H_B$  a  $\beta_B^\pm(0)$ ) dokážeme v našom

modeli zjednodušiť bez aproximačných predpokladov pomocou Campbell-Baker-Hausdorff faktorizačného teorému [Kir67]. Jeho cieľom je rozklad exponentu  $e^{iH_B t/2}$  na jednotlivé časti

$$e^{iH_B t/2} = e^{\alpha(it/2)\hat{b}} e^{\beta(it/2)\hat{c}} e^{\gamma(it/2)\hat{a}}, \quad (4.65)$$

obsahujúce len operátory  $\hat{a} = \alpha_{02}BB$ ,  $\hat{b} = \alpha_{02}B^\dagger B^\dagger$  a  $\hat{c} = \alpha_{11}B^+B + \alpha_{11}/2$ , pričom  $H_B = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} - \alpha_{11}/2$ . Funkcie  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  a  $\gamma(t)$  sa počítajú v rámci spomenutého teorému postupom opísaným v [Kir67]. Pomocou faktorizácie (4.65) a komutátora  $[B, B^\dagger] = 1$ , pre transformáciu bozónového operátora  $B^\dagger$  dostávame:

$$e^{iHt/2} B^\dagger e^{-iHt/2} = UB^\dagger + VB, \quad e^{-iHt/2} B^\dagger e^{iHt/2} = U^* B^\dagger + V^* B. \quad (4.66)$$

Hermitovské združenie rovníc (4.66) poskytuje časový vývoj anihilačného operátora  $B$ . Koefficienty  $U$  a  $V$  majú tvar

$$U = \cos\left(\frac{E_{RPA}}{2}t\right) + i\frac{\alpha_{11}}{E_{RPA}} \sin\left(\frac{E_{RPA}}{2}t\right), \quad V = i\frac{2\alpha_{02}}{E_{RPA}} \sin\left(\frac{E_{RPA}}{2}t\right), \quad (4.67)$$

v ktorom  $E_{RPA} = \sqrt{\alpha_{11}^2 - 4\alpha_{02}^2}$  je práve 1. excitačná energia vzbudeného stavu jadra predpovedaná štandardným QRPA priblížením. Použitím odvodených vzorcov (4.66) a vzťahov (4.59), (4.60) a (4.62), získame vyjadrenia operátorov  $\beta_B^\pm(t)$ .

V štandardnom QRPA výpočte  $\beta$ -prechodov sa berú do úvahy len prvé členy z bozónovej expanzie  $\beta$ -operátora (4.59):

$$\beta_{(I)}^-(0) = \sqrt{2\Omega}(u_p v_n B^\dagger + v_p u_n B), \quad \beta_{(I)}^+(0) = \left(\beta_{(I)}^-(0)\right)^\dagger. \quad (4.68)$$

Uvažovaním tohto jednoduchého prepisu dostávame pre silu  $\beta^-$ -prechodu v integrálnej reprezentácii výsledok<sup>7</sup>:

$$S_{\beta^-}^{(I)} = \left(\frac{\mathcal{A} - \mathcal{B}}{2}\right)^2 \delta(E_{RPA} - \omega) + \left(\frac{\mathcal{A} + \mathcal{B}}{2}\right)^2 \delta(E_{RPA} + \omega) + \left(\frac{\mathcal{A}^2 - \mathcal{B}^2}{2}\right) \delta(\omega), \quad (4.69)$$

kde

$$\mathcal{A} = u_p v_n, \quad \mathcal{B} = \frac{1}{E_{RPA}}(u_p v_n \alpha_{11} - 2v_p u_n \alpha_{02}). \quad (4.70)$$

Tu sme použili vzťah  $\langle 0|B^k(B^\dagger)^l|0\rangle = k! \delta_{kl}$ , pričom  $B|0\rangle = 0$ . Vyjadrenie sily  $S_{\beta^+}^{(I)}$  je rovnaké ako v (4.69), ale so zámienou amplitúd  $u_p \leftrightarrow u_n$ ,  $v_p \leftrightarrow v_n$  v koeficientoch  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$ . Vidíme, že  $\beta^-$  (aj  $\beta^+$ ) prechody sú realizované do stavov s excitačnými energiami  $\pm E_{RPA}$  a 0 MeV. Vzhľadom k definícii hodnoty  $\omega$ , fyzikálnu časť celkovej  $\beta^-$  ( $\beta^+$ ) sily reprezentuje prvý člen z (4.69) s energiou  $\omega = E_{RPA}$ . Pre  $2\nu\beta\beta$  maticový element (4.61) počítaný pomocou  $\beta_{(I)}^-(0)$  (označíme ho  $M_F^{(I)}$ ) platí:

$$M_F^{(I)} = \frac{2\Omega}{E_{RPA}^2} \left( \alpha_{11} u_p v_n v_p u_n - \alpha_{02} (u_p^2 v_n^2 + v_p^2 u_n^2) \right) \langle 0_f^+ | 0_i^+ \rangle. \quad (4.71)$$

<sup>7</sup> $2\nu\beta\beta$  maticový element a  $\beta^\pm$ -sily počítané pomocou expanzie (4.68) označíme indexom ( $I$ )

Z posledného vzorca vyplýva dôležitý fakt: ak sú iníciaľny a finálny stav  $|0_i^+\rangle$  a  $|0_f^+\rangle$  ortogonálne, maticový element  $M_F^{(I)}$  je rovný nule. V reálnom prípade dané vlnové funkcie nie sú ortogonálne v dôsledku nezachovania počtu častíc BCS (QRPA) základným stavom. Napríklad v BCS priblížení je prekrytie  $\langle 0_f^+ | 0_i^+ \rangle \approx 0.6 - 0.8$ . Rekonštrukciou správneho počtu častíc pre pôvodný a výsledný jadrový systém (pomocou projekcie vlnových funkcií) získame v uvažovanom priblížení výsledok  $M_F^{(I)} = 0 \text{ MeV}^{-1}$ . Treba zdôrazniť, že medzi stavmi  $|0_i^+\rangle$  a  $|0_f^+\rangle$  musí v definícii  $M_F^{2\nu}$  vystupovať minimálne dvojjasticový operátor, keďže opisujeme  $2\nu\beta\beta$ -proces. Fyzikálny príspevok do maticového elementu  $M_F^{2\nu}$  má preto pôvod vo vyšších členoch bozónového rozvoja  $\beta$ -prechodových operátorov, respektíve jadrového hamiltoniánu  $H_B$ . V rámci prezentovaných štúdií preskúmame prvú možnosť.

Vezmime vyjadrenia operátorov  $\beta_B^\pm(0)$  s ohraničením po členy druhého rádu z expanzie (4.59). Máme:

$$\beta_{(II)}^-(0) = \sqrt{2\Omega} [u_p v_n B^\dagger + v_p u_n B + \alpha_{21} (u_p v_n B^\dagger B^\dagger B + v_p u_n B^\dagger B B)], \quad (4.72)$$

a  $\beta_{(II)}^+(0) = (\beta_{(II)}^-(0))^\dagger$ . Pre silu  $S_{\beta^-}^{(II)}$  s použitím uvedeného rozvoja (4.72) a vzorca  $\langle 0 | B^k (B^\dagger)^l | 0 \rangle = k! \delta_{kl}$  získame:

$$\begin{aligned} S_{\beta^-}^{(II)} = 2\Omega & \left[ S_0 \delta(\omega) + S_1 \delta(E_{RPA} - \omega) + S_{-1} \delta(E_{RPA} + \omega) \right. \\ & + S_2 \delta(2E_{RPA} - \omega) + S_{-2} \delta(2E_{RPA} + \omega) \\ & \left. + S_3 \delta(3E_{RPA} - \omega) + S_{-3} \delta(3E_{RPA} + \omega) \right]. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Konštanty  $S_i$ , ( $i = -3, \dots, 3$ ) sú funkcie parametrov  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{02}$ ,  $\alpha_{21}$ , energie  $E_{RPA}$  a BCS amplitúd  $u_\tau$ ,  $v_\tau$ , ( $\tau = p, n$ ). Štruktúra  $\beta^+$ -sily je zhodná so vzťahom (4.73), rozdielne je len explicitné vyjadrenie členov  $S_i$ , ktoré sa líšia od  $S_i$  hodnôt v  $S_{\beta^-}^{(II)}$  zámenou  $u_p \leftrightarrow u_n$ ,  $v_p \leftrightarrow v_n$ . Všimnime si, že uvažovaním vyšších členov z bozónovej expanzie operátorov  $\beta_B^\pm(0)$  pribudli do celkových  $\beta^\pm$ -síl nové prechody do vyšších vzbudených stavov. Fyzikálny význam majú tie z nich, ktoré prislúchajú kladnej energii  $\omega$  (t.j. časti  $S_1$ ,  $S_2$  a  $S_3$ ). Pre porovnanie so štandardnými QRPA výpočtami  $\beta^\pm$ -síl je podstatný člen  $S_1$  v (4.73), pre ktorý je  $\omega = E_{RPA}$ . Vzorec na výpočet hodnoty  $S_1$  je uvedený v dodatku C.4.

Venujme teraz pozornosť určení maticového elementu  $M_F^{(II)}$ . Komutátor časovo závislých  $\beta^-$ -operátorov z definície  $M_F^{2\nu}$  (4.61) nie je po dosadení rozvoja  $\beta_{(II)}^-(0)$  (vzťah (4.72)) konštantný, ale má štruktúru

$$[\beta_{(II)}^-(t/2), \beta_{(II)}^-(-t/2)] = K_{00} + K_{11} B^\dagger B + K_{02} B B + K_{20} B^\dagger B^\dagger + \dots, \quad (4.74)$$

v ktorej koeficienty  $K_{ij}$  sú závislé od tých istých parametrov ako funkcie  $S_i$  z rovnosti (4.73). Pre  $2\nu\beta\beta$ -rozpad je relevantný člen s operátorom  $BB$  (prípadne ďalšie členy  $B^4$ , atď., ktoré tu neuvažujeme). Za predpokladu ortogonalit počiatočného a koncového stavu pri  $2\nu\beta\beta$ -premene ( $\langle 0_f^+ | 0_i^+ \rangle = 0$ ) a použitím hornej

hranice pre hodnotu elementu  $\langle 0_f^+ | BB | 0_i^+ \rangle = 1$  prichádzame k výsledku, ktorý predstavuje fyzikálnu časť Fermiho  $2\nu\beta\beta$  maticového elementu:

$$M_F^{(II)} = 2\Omega \left[ M_1 \frac{1}{E_{RPA}} + M_2 \frac{1}{2E_{RPA}} + M_3 \frac{1}{3E_{RPA}} \right]. \quad (4.75)$$

Vzťahy pre konštanty  $M_1$ ,  $M_2$  a  $M_3$  sú uvedené v dodatku C.4.

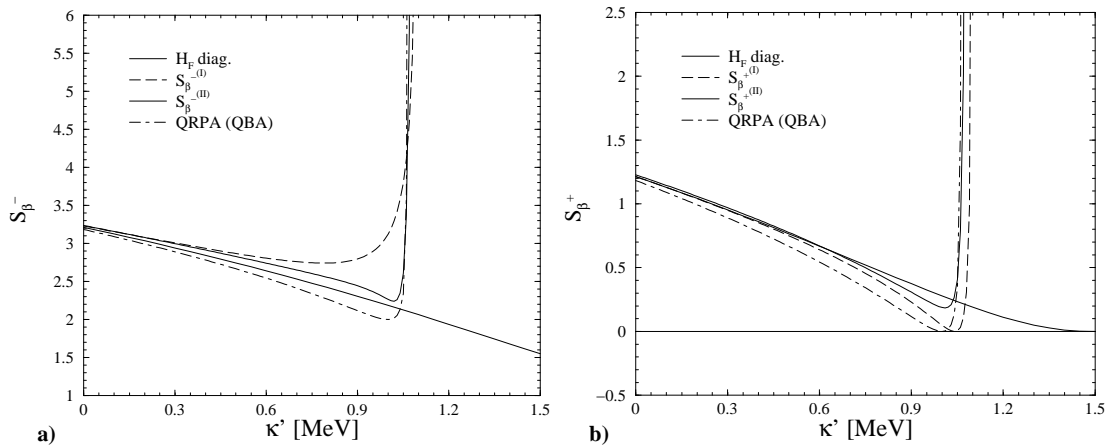
#### 4.4.2 Výsledky

Výpočty síl  $S_{\beta\pm}$  a elementu  $M_F^{2\nu}$  sme previedli pre jadrový prechod ( $Z = 6, N = 14$ )  $\rightarrow$  ( $Z = 8, N = 12$ ). Parametre definujúce modelový priestor sú  $j = 19/2$  a  $\epsilon = 1\text{MeV}$ . Hodnotu zvyškovej časticovo–dierovej ( $p$ - $h$ ) interakcie  $\chi'$  fixujeme, zatiaľ čo veľkosť časticovo–časticovej ( $p$ - $p$ ) sily  $\kappa'$  považujeme za voľný parameter.

Treba uviesť, že v  $\beta\beta$  výpočtoch máme dve kvázičasticové reprezentácie jadrového hamiltoniánu (4.58). Jednu spojenú s počiatočným jadrom, druhú s konečným systémom pri  $\beta\beta$ -premene. Keďže QRPA výpočty  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu vykazujú veľkú citlivosť na  $\beta$ -prechod z intermediálneho do koncového jadra, stotožňujeme hamiltonián  $H_B$  vystupujúci v integrálnych výpočtoch  $S_{\beta\pm}$  a  $M_F^{2\nu}$  s konečným mnohonukleónovým systémom, aby sme dosiahli čo najlepšiu zhodu s QRPA výsledkom.

Na obrázkoch 4.23 a) a b) sú nakreslené sily jednoduchého  $\beta^-$  a  $\beta^+$ -prechodu z počiatočného do prvého excitovaného stavu, počítané v integrálnej reprezentácii. Ukázané sú dva prípady s použitím členov prvého a druhého rádu z bozónovej expanzie príslušného  $\beta$ -prechodového operátora (riešenia s označením  $S_{\beta\pm}^{(I)}$  a  $S_{\beta\pm}^{(II)}$ ). Pre porovnanie uvádzame presné hodnoty ( $H_F$  diag.) získané na základe diagonalizácie pôvodného hamiltoniánu  $H_F$  (2.48) a tiež štandardné QRPA (QBA) výsledky pre dané veličiny.

Obrázok 4.23: Sila jednoduchého  $\beta^-$ -prechodu (a) a  $\beta^+$ -prechodu (b) do 1. vzбудeného stavu ako funkcia parametra  $\kappa'$ . Veľkosť  $p$ - $h$  interakcie  $\chi'$  je  $0.5\text{MeV}$ . Označenie jednotlivých riešení je vysvetlené v texte.

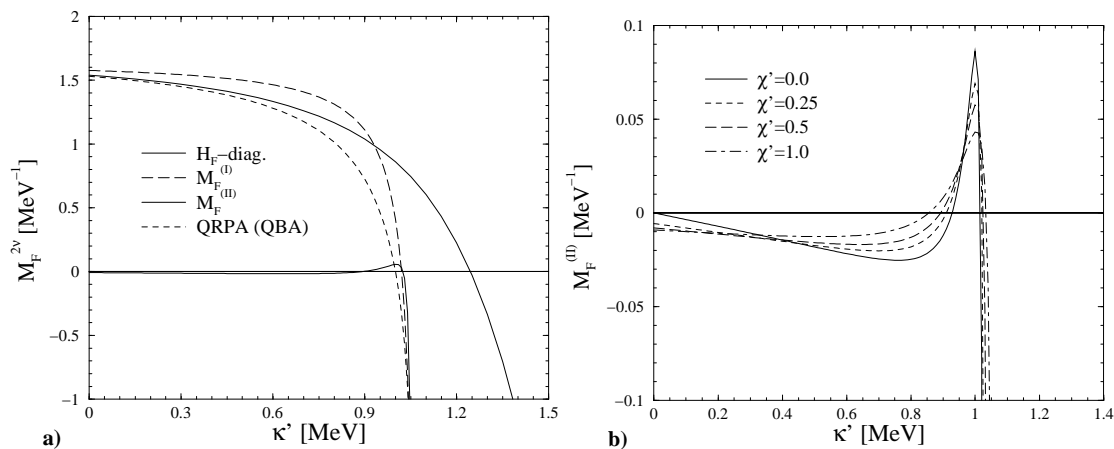


Z prezentovaných grafov 4.23 vyplýva, že integrálne výpočty  $\beta$ -síl vykazujú kolaps pri určitej  $p$ - $p$  sile  $\kappa'$  blízkej k hodnote, v ktorej kolabuje aj štandardné QRPA riešenie. Je to dôsledok použitia hamiltoniánu (4.58) obsahujúceho len kvadratické členy z operátorov  $B^\dagger$ ,  $B$ . Na odstránenie alebo posunutie kolapsu integrálnych výpočtov do vyšších hodnôt  $\kappa'$  by bolo treba zahrnúť ďalšie členy do  $H_B$  z bozónového obrazu operátora  $H_F$  (tak ako v hamiltoniáne (4.1)) a nájst spôsob dekompozície exponentu  $e^{iH_B t}$  na výpočet členov  $\beta^\pm(t)$ . Obrázky 4.23 ďalej ukazujú, že jednoduchý (lineárny) prepis  $\beta^\pm(0)$  operátorov do bozónovej reprezentácie vedie na uspokojivé výsledky pre silu  $S_{\beta^+}^{(I)}$ , ale je nedostatočný vo výpočtoch  $S_{\beta^-}^{(I)}$ . Uvažovaním vyšších členov rozvoja  $\beta^\pm(0)$  (vzťah (4.59)) sa v prezentovanej integrálnej reprezentácii získa lepší výsledok pre  $\beta^-$  aj  $\beta^+$ -silu. Hodnoty  $S_{\beta^\pm}^{(II)}$  sú tiež lepšie ako QRPA predpovede exaktných výsledkov. Zaujímavé je, že QRPA a integrálne riešenie  $S_{\beta^+}^{(I)}$  tesne pred kolapsom produkujú nulovú hodnotu  $\beta^+$ -sily. Je to nedostatok týchto metód, pretože presné ( $H_F$  diag.) čísla pre  $S_{\beta^+}$  tu nie sú nulové. Výpočet  $S_{\beta^+}^{(II)}$  vďaka dokonalejšiemu vyjadreniu operátorov  $\beta^\pm(0)$  dáva nenulové  $\beta^+$ -prechody, ktoré sú len málo odlišné od exaktných v danej oblasti interakcie  $\kappa'$ . Dodajme, že sily  $\beta^\pm$ -premién do ostatných koncových stavov ( $\omega = 0, 2E_{RPA}, 3E_{RPA}$ ) počítané z konštánt  $S_0, S_2$  a  $S_3$  v (4.73), sú minimálne o rád potlačené oproti prechodom do 1. vzbudeného stavu s energiou  $\omega = E_{RPA}$ .

Výsledky výpočtu Fermiho  $2\nu\beta\beta$  maticového elementu  $M_F^{2\nu}$  v integrálnom tvare uvádzame na grafe 4.24 a). Rozlišujeme tu nasledovné riešenia:

(i) Nefyzikálny príspevok do  $M_F^{2\nu}$  (s označením  $M_F^{(I)}$ ), určený z rovnice (4.71) s predpokladom  $\langle 0_f^+ | 0_i^+ \rangle \approx 1.0$ .

Obrázok 4.24: **a)**: maticový element  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu počítaný v integrálnej reprezentácii so separovanou fyzikálnou ( $M_F^{(II)}$ ) a nefyzikálnou ( $M_F^{(I)}$ ) časťou ako funkcia  $\kappa'$ . Uvedené je aj štandardné QRPA a presné riešenie ( $H_F - diag.$ ). Použitá  $p$ - $h$  sila je  $\chi' = 0.5 \text{ MeV}$ . **b)**: štúdium citlivosti fyzikálnej zložky  $2\nu\beta\beta$ -elementu  $M_F^{(II)}$  na zmenu  $p$ - $p$  a  $p$ - $h$  interakcie  $\kappa'$  a  $\chi'$ .



- (ii) Fyzikálna časť maticového elementu  $M_F^{2\nu}$ , čiže  $M_F^{(II)}$ , daná vzťahom (4.75).
- (iii)  $2\nu\beta\beta$  maticový element počítaný v rámci QRPA z definície (2.63), ktorá vyžaduje znalosť energií a vlnových funkcií prechodového jadra (označenie QRPA (QBA)). Parameter  $\Delta$  vystupujúci v (2.63) a rovný polovici energie uvoľnenej pri  $2\nu\beta\beta$ -premene, berieme 0.5MeV ako v predchádzajúcich schématických výpočtoch. Podotknime, že v uvažovanom modeli dostávame len jeden QRPA vzbudený stav pre intermediálne jadro. V QRPA výpočte  $M_F^{2\nu}$  je tento konštruovaný z počiatočného aj konečného jadrového systému. Získané vlnové funkcie a energie však nie sú rovnaké (ide o tzv. dvojvákuový problém).
- (iv) Exaktný výpočet  $M_F^{2\nu}$  zo vzorca (2.63), v ktorom použijeme presné riešenia pre vlnové funkcie a jednoduché  $\beta$ -amplitúdy, získané diagonalizáciou hamiltoniánu  $H_F$  (2.48).

Z grafu 4.24 a) vyplýva, že nefyzikálna časť elementu  $M_F^{2\nu}$  ( $M_F^{(I)}$ ) je vďaka nezachovaniu počtu častíc v predmetných vlnových funkciách nenulová a vykazuje podobné správanie ako štandardný QRPA výpočet  $M_F^{2\nu}$ . Veľmi malé rozdiely riešení (i) a (iii) súvisia jednak s voľbou veľkosti parametra  $\Delta$ , jednak s použitím kvázičasticovej reprezentácie hamiltoniánu  $H_B$ , spojenej s finálnym jadrom v integrálnych výpočtoch, čo sme vysvetlili v druhom odstavci tejto časti. Celkovo však podobnosť QRPA a  $M_F^{(I)}$  výsledkov znamená, že dvojvákuový problém výrazne ovplyvňuje QRPA opis  $2\nu\beta\beta$ -prechodu a spôsobuje veľký nefyzikálny príspevok do príslušného maticového elementu. Fyzikálna časť Fermiho elementu ( $M_F^{(II)}$ ), ktorú vieme selektovať len v integrálnej reprezentácii  $M_F^{2\nu}$ , je silne potlačená hlavne pri malých hodnotách  $\kappa'$ . Funkcia  $M_F^{(II)}(\kappa')$  nadobúda svoje maximum až v blízkosti kolapsu QRPA riešenia, pričom obe metódy tu predpovedajú približne rovnaké hodnoty  $M_F^{2\nu}$ .

Na obrázku 4.24 b) študujeme správanie sa fyzikálnej zložky  $2\nu\beta\beta$  maticového elementu (s označením  $M_F^{(II)}$ ) ako funkcie parametra  $\kappa'$  pri rôznych silách  $p$ - $h$  interakcie  $\chi'$ . Treba uviesť, že v prípade  $\kappa' = \chi' = 0\text{MeV}$  dostávame  $M_F^{(II)} = 0\text{MeV}^{-1}$ . Tento správny výsledok vyplýva aj z analytického výpočtu amplitúdy  $2\nu\beta\beta$ -premeny pri vypnutej reziduálnej interakcii hamiltoniánu [ŠP99] a bol spomenutý tiež v kapitole 2.1.2. Ďalej registrujeme, že narastajúca  $p$ - $h$  sila  $\chi'$  spôsobuje znižovanie absolútnych hodnôt  $M_F^{(II)}$  v celej oblasti ich existencie. Je zaujímavé, že v okolí  $p$ - $p$  interakcie  $\kappa' = 1\text{MeV}$  pretína vypočítaný maticový element  $M_F^{(II)}$  dvakrát nulovú os  $x$ . Prvý prípad má zrejme svoj fyzikálny význam, zatiaľ čo druhý je spôsobený kolapsom prezentovaného riešenia. Dôležitou črtou získaných výsledkov  $M_F^{(II)}$  je ich malá citlivosť na zmenu parametra  $p$ - $p$  interakcie (v porovnaní s QRPA riešením), s výnimkou oblasti kolapsu.

Zhrňme na záver dosiahnuté výsledky z tejto kapitoly:

- (i) Prezentovali sme alternatívne výpočty síl jednoduchých  $\beta$ -prechodov a maticového elementu  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu v integrálnej reprezentácii bez konštrukcie intermediálnych stavov. Daný postup vyžaduje znalosť analytického vyjadrenia časovo závislých  $\beta$ -rozpadových operátorov.
- (ii) Celá teória je budovaná v bozónovom priestore s použitím schématického

hamiltoniánu s ohraničením po kvadratické členy z bozónových operátorov  $B^\dagger$ ,  $B$ . Bol nájdený postup, ktorý umožňuje počítať časové závislosti  $\beta$ -prechodových operátorov presne bez dodatočných priblížení.

- (iii) Získané hodnoty  $\beta^\pm$ -síl sa dobre zhodujú s exaktnými výsledkami. Integrované riešenia pre  $\beta^\pm$ -sily a  $2\nu\beta\beta$ -prechod vykazujú kolaps v rovnakej oblasti interakcie  $\kappa'$  ako štandardné QRPA výpočty. Je to dôsledok použitého modelového hamiltoniánu. Ukázalo sa, že pre integrálny výpočet  $\beta$ -síl a  $2\nu\beta\beta$ -elementu sú dôležité vyššie členy z bozónovej expanzie modelového hamiltoniánu alebo príslušných  $\beta$ -prechodových operátorov. Skúmali sme druhú možnosť.
- (iv) Integrované vyjadrenie  $2\nu\beta\beta$  Greenovej funkcie umožnilo extrahovať nefyzikálnu časť maticového elementu  $M_F^{2\nu}$ . Táto je veľmi veľká v porovnaní s fyzikálnou zložkou a vďaka dvojjákuovému problému je významne prítomná aj v QRPA výpočtoch  $M_F^{2\nu}$ . Fyzikálny príspevok do  $2\nu\beta\beta$ -elementu ( $M_F^{(II)}$ ) je silne potlačený a svoje maximum nadobúda v okolí kolapsu QRPA riešenia. Dôležité tiež je, že hodnoty  $M_F^{(II)}$  sú s výnimkou oblasti kolapsu veľmi málo citlivé na zmenu parametra  $\kappa'$ .

### 4.4.3 Diskusia

V predloženej kapitole sme prezentovali originálny výpočet jednoduchých a dvojitých  $\beta$ -prechodov v integrálnej reprezentácii. Daný postup nie je náročný na opis jadrovej štruktúry, lebo v uvažovanej definícii  $2\nu\beta\beta$  maticového elementu nevystupuje úplná sústava vzбудených stavov a energií intermediálneho jadra. Vyžaduje však poznať príslušné  $\beta$ -prechodové operátory v Heisenbergovej reprezentácii (v čase  $t$ ). Ich vyjadrenia pozostávajú z nekonečnej sumy mnohonásobných komutátorov daných  $\beta$ -operátorov v čase  $t = 0$  s modelovým hamiltoniánom. Približné určenie predmetnej sumy sa realizuje v rámci *Metódy expanzie prechodového operátora* [ŠPF98a] (je uvedená v časti 2.2.4). V našom prípade uvažujeme schématický model v bozónovej reprezentácii, v ktorom sme našli spôsob na presný výpočet spomenutých časovo závislých  $\beta$ -operátorov. To nám umožnilo uskutočniť ne-tradičnú konštrukciu Greenovej funkcie jednoduchého a dvojitého  $\beta$ -prechodu v integrálnom tvare.

Ukázalo sa, že pomocou štandardného vyjadrenia bezčasového  $\beta$ -rozpadového operátora (4.68) (používaného v QRPA) dostávame v integrálnych výpočtoch nefyzikálnu hodnotu Fermiho  $2\nu\beta\beta$  maticového elementu. Jej existencia je spôsobená nenulovým prekrytím základných stavov pôvodného a výsledného jadra pri  $\beta\beta$ -rozpade v dôsledku nezachovania správneho počtu nukleónov v daných vlnových funkciách. Získané nefyzikálne riešenie je veľmi podobné štandardným QRPA hodnotám Fermiho maticového elementu ( $M_F^{2\nu}$ ). Preto predpokladáme, že v QRPA opise  $2\nu\beta\beta$ -premeny sú výsledky výrazne skreslené dominantným nefyzikálnym príspevkom, čo súvisí s dvojjákuovým problémom a prímiesou zlého počtu častíc



v iniciálnom a finálnom základnom stave. Na korektné riešenie tohto nedostatku QRPA je potrebné obnoviť správny počet častíc v príslušných vlnových funkciách.

Fyzikálna zložka maticového elementu  $M_F^{2\nu}$  získaná v rámci integrálnych výpočtov je až o rád potlačená oproti nefyzikálnej časti  $M_F^{2\nu}$ . Svoje maximum nadobúda práve v reálne prípustnej oblasti hodnôt časticovo-časticovej ( $p$ - $p$ ) sily ( $\kappa' \approx 1\text{MeV}$ ). Taktiež spĺňa dôležitú podmienku, ktorú QRPA výpočty  $M_F^{2\nu}$  narušujú: je nulová pri vypnutej reziduálnej interakcii hamiltoniánu. Existencia fyzikálneho príspevku do  $2\nu\beta\beta$  maticového elementu súvisí s vyššími členmi v bozónovej expanzii modelového hamiltoniánu alebo  $\beta$ -rozpadového operátora. V našich štúdiách sme uvažovali len druhú možnosť, pretože sa dala realizovať s nájdeným rozkladom exponentu  $e^{iH_B t}$ . Jej nevýhoda oproti prvému prípadu spočíva v tom, že kolaps riešenia ostáva nezmenený, situovaný v blízkosti kolapsu štandardnej QRPA metódy. Z tohto hľadiska by bolo užitočné nájsť spôsob výpočtu elementu  $M_F^{2\nu}$  s dokonalejším modelovým hamiltoniánom (napríklad vzťah (4.1)), ktorý by zabezpečil posunutie kolapsu riešení do nefyzikálnej oblasti  $p$ - $p$  interakcie medzi nukleónmi.

V prípade síl jednoduchých  $\beta^\pm$ -prechodov dostávame fyzikálne opodstatnené hodnoty aj pre jednoduchý tvar príslušných  $\beta^\pm$ -operátorov (4.68) (používaný v štandardnej QRPA metóde). Porovnanie získaných výsledkov s exaktnými riešeniami však ukazuje, že s rastúcou  $p$ - $p$  interakciou  $\kappa'$  je daná jednoduchá štruktúra  $\beta^\pm$ -operátorov nedostatočná (hlavne v prípade  $S_{\beta^-}$  síl). Uvažovaním vyšších členov z bozónovej expanzie operátorov  $\beta^\pm$  získame podstatne lepšiu predpoveď exaktných síl  $S_{\beta^\pm}$  aj v porovnaní s QRPA výsledkami.

Na záver treba poznamenať, že prezentované výpočty  $2\nu\beta\beta$ -prechodu, ktoré obchádzajú explicitnú konštrukciu intermediálnych vzbudených stavov, vnášajú nový pohľad na problém spoľahlivosti  $2\nu\beta\beta$ -maticových elementov konštruovaných v rámci štandardnej QRPA metódy a tiež prispievajú k riešeniu otázky citlivosti hodnôt  $M_F^{2\nu}$  na zmenu sily časticovo-časticovej interakcie.

## 4.5 QRPA s perturbatívnym splnením Pauliho princípu

V tejto kapitole je v realistickom prípade rozpracovaná QRPA metóda, ktorá zabezpečuje zachovanie Pauliho vylučovacieho princípu perturbatívnym spôsobom (PP-QRPA). Tento prístup bol navrhnutý v práci [Š<sup>+</sup>00] v schématickom jednovrstvom modeli s predpokladom možnej aplikácie v realistických výpočtoch. Treba poznamenať, že princíp PP-QRPA ide za rámec súčasných QRPA aproximácií používaných v realistických výpočtoch (QRPA, RQRPA). Schématické štúdie ukázali, že PP2-QRPA metóda (perturbatívny výpočet maticových elementov do 2. rádu v rozvoji vlnovej funkcie jadra podľa príslušného korelačného koeficientu) poskytuje výsledky, ktoré sú stabilnejšie voči zmene časticovo-časticovej interakcie v hamiltoniáne ako hodnoty získané pomocou RQRPA.

### 4.5.1 Charakteristika metódy

Uvažovaná QRPA modifikácia je založená na PP2-QRPA formalizme [Š<sup>+</sup>00], avšak s použitím realistického hamiltoniánu so separabilnou protón–neutrónovou zvyškovou interakciou [HHC96]. Sústreďujeme sa na opis a štúdium jednoduchých a dvojitých Fermiho  $\beta$ -prechodov, ktoré sú jednoduchšie z hľadiska výpočtu maticových elementov, avšak na QRPA úrovni vykazujú podobné kvalitatívne správanie ako Gamow-Tellerove prechody. A tak skúmané vlastnosti a dôsledky rôznych QRPA aproximácií sú v oboch prípadoch približne rovnaké.

Celkový hamiltonián umožňujúci realistický opis Fermiho  $\beta$ -prechodov je daný nasledovne [KS84; KS88; HHC96]

$$H = H_p + H_n + H_{res}. \quad (4.76)$$

Jednočasticový a párovací člen pre protóny a neutróny ( $H_p, H_n$ ) má tvar:

$$H_\tau = \sum_{\tau, m_\tau} \epsilon_\tau a_{\tau m_\tau}^\dagger a_{\tau m_\tau} - \sum_{\tau'} G_\tau S_{\tau'}^\dagger S_{\tau'}, \quad S_{\tau'}^\dagger = \frac{1}{2} \sum_{\tau'} a_{\tau'}^\dagger \tilde{a}_{\tau'}^\dagger, \quad (\tau = p, n), \quad (4.77)$$

v ktorom  $\epsilon_\tau$  sú jednočasticové energie (určené napr. z Woods-Saxonovho potenciálu pre stredné pole),  $G_\tau$  je sila párovacej nukleón–nukleónovej interakcie.  $a_{\tau'}^\dagger$  ( $a_{\tau'}$ ) je kreačný (anihilačný) operátor častice s kvantovými číslami  $\tau'$ . „Čiarkované“ indexy v texte označujú sadu kvantových čísel spolu s magnetickým číslom:  $\tau' \equiv (n_\tau, l_\tau, j_\tau, m_\tau)$ , „nečiarkované“ indexy znamenajú kvantové čísla bez príslušnej projekcie uhlového momentu:  $\tau \equiv (n_\tau, l_\tau, j_\tau)$ . Pre časovo–reverzný operátor je použitá konvencia  $\tilde{a}_{\tau'}^\dagger = (-1)^{j_\tau - m_\tau} a_{\tau' - m_\tau}^\dagger$ . Reziduálna interakcia pozostáva zo separabilnej časticovo–časticovej (p-p) a časticovo–dierovej (p-h) protón–neutrónovej zložky

$$H_{res} = 2\chi : \beta_0^- (\beta_0^-)^\dagger : - 2\kappa : P_0^- (P_0^-)^\dagger :,$$

$$\beta_0^- = \sum_{p'n'} \langle p | \tau^+ | n \rangle a_p^\dagger a_{n'}^+, \quad \beta_0^+ = (\beta_0^-)^+, \quad P_0^- = \sum_{p'n'} \langle p | \tau^+ | n \rangle a_p^\dagger \tilde{a}_{n'}^+, \quad P_0^+ = (P_0^-)^+. \quad (4.78)$$

Parametre  $\chi$  a  $\kappa$  majú význam renormalizačných faktorov p-h a p-p interakcie (v tomto poradí), v literatúre používaných aj pod označením  $g_{ph}$  a  $g_{pp}$ . P-h (p-p) sila je definovaná ako odpudivá (príťažlivá) tak, aby odrážala základné vlastnosti nukleón–nukleónového vzájomného pôsobenia. Zbytková interakcia (4.78) v rámci QRPA výpočtov rovnako dobre opisuje jednoduché a dvojité  $\beta$ -prechody [HHC96; CS94a] ako hamiltonián s použitím G-matic [Bru55] konštruovaných z Bonnského jadrového potenciálu.

Pre opis jadier s otvorenou vrstvou a protón–protónového, neutrón–neutrónového spárovania prepíšeme hamiltonián (4.76) do kvázičasticovej reprezentácie. Použijeme Bogolyubovu transformáciu [RS80]

$$\begin{pmatrix} a_{\tau'}^\dagger \\ \tilde{a}_{\tau'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\tau & v_\tau \\ -v_\tau & u_\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{\tau'}^\dagger \\ \tilde{\alpha}_{\tau'} \end{pmatrix}, \quad (4.79)$$

ktorá rozmaže Fermiho hladinu jadra cez relatívne veľký počet stavov.  $\alpha_{\tau'}^{\dagger}$  ( $\alpha_{\tau'}$ ) označuje kreačný (anihilačný) kvázičasticový operátor,  $v_{\tau}$ ,  $u_{\tau}$  sú obsadzovacie amplitúdy jednočasticových stavov. Riešením príslušnej BCS rovnice (dodatok A) s fixovanými hodnotami protónovej a neutrónovej medzery  $\Delta_p$  a  $\Delta_n$  získame energie kvázičastíc  $E_{\tau}$  a pravdepodobnosti obsadenia jednotlivých stavov  $v_{\tau}^2$ ,  $u_{\tau}^2 = 1 - v_{\tau}^2$ . Hamiltonián v kvázičasticovej reprezentácii bude mať tvar:

$$H = H_0 + H_{int} . \quad (4.80)$$

$H_0$  je člen opisujúci stredné pole

$$H_0 = \sum_p E_p N_p + \sum_n E_n N_n, \quad N_{\tau} = \sum_{m_{\tau}} \alpha_{\tau m_{\tau}}^{\dagger} \alpha_{\tau m_{\tau}}, \quad (4.81)$$

a pre interakčnú časť  $H_{int}$  platí:

$$H_{int} = \chi (\beta_0^- \beta_0^+ + \beta_0^+ \beta_0^-) - \kappa (P_0^- P_0^+ + P_0^+ P_0^-), \quad (4.82)$$

v ktorej sú prechodové operátory  $\beta_0^{\pm}$  a  $P_0^{\pm}$  definované nasledovne

$$\begin{aligned} \beta_0^- &= \sum_{pn} \tau(pn) [u_p v_n A^{\dagger}(pn0) + v_p u_n A(pn0) - u_p u_n B^{\dagger}(pn0) + v_p v_n B(pn0)], \\ \beta_0^+ &= (\beta_0^-)^+, \\ P_0^- &= \sum_{pn} \tau(pn) [u_p u_n A^{\dagger}(pn0) - v_p v_n A(pn0) + u_p v_n B^{\dagger}(pn0) + v_p u_n B(pn0)], \\ P_0^+ &= (P_0^-)^+. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Symbolom  $\tau(pn)$  je označený maticový element

$$\tau(pn) = \langle p || \tau^+ || n \rangle = \delta_{n_p n_n} \delta_{l_p l_n} \delta_{j_p j_n} \hat{j}_p, \quad \hat{j}_p \equiv \sqrt{2j_p + 1}. \quad (4.84)$$

Tento spôsobuje, že nedochádza k viazaniu jednočasticových stavov s rôznymi kvantovými číslami  $n$ ,  $l$ ,  $j$  do spoločnej  $J^{\pi} = 0^+$  protón–neutrónovej konfigurácie. Vo vzorcoch (4.83) vystupujú bifermiónové kvázičasticové operátory zviazané do nulového uhlového momentu:

$$\begin{aligned} A^{\dagger}(pn0) &= [\alpha_p^{\dagger} \alpha_n^{\dagger}]^{00} = \frac{1}{\hat{j}_p} \sum_m \alpha_{pm}^{\dagger} \tilde{\alpha}_{nm}^{\dagger} \delta_{j_p j_n}, \quad A(pn0) = (A^{\dagger}(pn0))^+, \\ B^{\dagger}(pn0) &= [\alpha_p^{\dagger} \tilde{\alpha}_n]^{00} = -\frac{1}{\hat{j}_p} \sum_m \alpha_{pm}^{\dagger} \alpha_{nm} \delta_{j_p j_n}, \quad B(pn0) = (B^{\dagger}(pn0))^+. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Ak zanedbáme tzv. rozptylové členy (operátory  $B^{\dagger}(pn0)$ ,  $B(pn0)$ ), potom môžeme pre hamiltonián (4.80) písať

$$\begin{aligned} H &= \sum_p E_p N_p + \sum_n E_n N_n \\ &+ \sum_{p_1 n_1 p_2 n_2} \{ \lambda_{11}(p_1 n_1, p_2 n_2) (A^{\dagger}(p_1 n_1 0) A(p_2 n_2 0) + A^{\dagger}(p_2 n_2 0) A(p_1 n_1 0)) \\ &\quad + \lambda_{02}(p_1 n_1, p_2 n_2) (A(p_1 n_1 0) A(p_2 n_2 0) + A^{\dagger}(p_1 n_1 0) A^{\dagger}(p_2 n_2 0)) \}, \end{aligned} \quad (4.86)$$

kde

$$\begin{aligned}\lambda_{11}(p_1 n_1, p_2 n_2) &= \tau(p_1 n_1) \tau(p_2 n_2) [\chi(u_{p_1} v_{n_1} u_{p_2} v_{n_2} + v_{p_1} u_{n_1} v_{p_2} u_{n_2}) \\ &\quad - \kappa(u_{p_1} u_{n_1} u_{p_2} u_{n_2} + v_{p_1} v_{n_1} v_{p_2} v_{n_2})], \\ \lambda_{02}(p_1 n_1, p_2 n_2) &= \tau(p_1 n_1) \tau(p_2 n_2) [\chi(u_{p_1} v_{n_1} v_{p_2} u_{n_2} + v_{p_1} u_{n_1} u_{p_2} v_{n_2}) \\ &\quad + \kappa(u_{p_1} u_{n_1} v_{p_2} v_{n_2} + v_{p_1} v_{n_1} u_{p_2} u_{n_2})].\end{aligned}\quad (4.87)$$

V rovnosti (4.86) vystupujú len operátory  $A^\dagger(pn0)$ ,  $A(pn0)$ ,  $N_p$ ,  $N_n$ , ktoré tvoria uzavretú SU(2) algebru (2.50). Tento fakt umožňuje zjednodušiť počítanie QRPA maticových elementov.

Hlavným prínosom novej metódy PP2-QRPA je presný výpočet dvojných komutátorov obsiahnutých v QRPA maticiach, pričom celý formalizmus je budovaný vo fermiónovom priestore, t.j. bez vplyvu aproximácií spôsobených mapovaním operátorov do bozónového priestoru. S použitím štandardného QRPA fonónového operátora

$$Q^\dagger(m) = \sum_{pn} \{X_{pn}^{(m)} A^\dagger(pn0) - Y_{pn}^{(m)} A(pn0)\}, \quad (4.88)$$

dostávame systém QRPA rovníc

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(m)} \\ Y^{(m)} \end{pmatrix} = E_{RPA}^{(m)} \begin{pmatrix} \mathcal{U} & 0 \\ 0 & -\mathcal{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(m)} \\ Y^{(m)} \end{pmatrix}. \quad (4.89)$$

$E_{RPA}^{(m)}$  je excitačná energia  $m$ -tého vzбудeného stavu. QRPA matice

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(p_1 n_1, p_2 n_2) &= \langle RPA | [A(p_1 n_1 0), H, A^\dagger(p_2 n_2 0)] | RPA \rangle, \\ \mathcal{B}(p_1 n_1, p_2 n_2) &= -\langle RPA | [A(p_1 n_1 0), H, A(p_2 n_2 0)] | RPA \rangle, \\ \mathcal{U}(p_1 n_1, p_2 n_2) &= \langle RPA | [A(p_1 n_1 0), A^\dagger(p_2 n_2 0)] | RPA \rangle,\end{aligned}\quad (4.90)$$

majú pri použití hamiltoniánu (4.86) nasledovné presné vyjadrenia (pre jednoduchosť je použité spoločné označenie protón–neutrónových konfigurácií  $k = p_1 n_1$ ,  $l = p_2 n_2$  a skrátenejší zápis:  $\langle \rangle \equiv |RPA\rangle$ ):

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(k, l) &= \left( E_{p_k} + E_{n_k} - 2\lambda_{11}(k, k) / \hat{j}_k^2 \right) \delta_{kl} + 2\lambda_{11}(k, l) \\ &\quad + \left( 2\lambda_{11}(k, k) / \hat{j}_k^2 - E_{p_k} - E_{n_k} \right) (\langle N_{p_k} \rangle + \langle N_{n_k} \rangle) \frac{\delta_{kl}}{\hat{j}_k^2} \\ &\quad - \frac{2\lambda_{11}(k, l)}{\hat{j}_k^2} (\langle N_{p_k} \rangle + \langle N_{n_k} \rangle) - \frac{2\lambda_{11}(k, l)}{\hat{j}_l^2} (\langle N_{p_l} \rangle + \langle N_{n_l} \rangle) \\ &\quad + \frac{2\lambda_{11}(k, l)}{\hat{j}_k^2 \hat{j}_l^2} (\langle N_{p_k} N_{p_l} \rangle + \langle N_{n_k} N_{n_l} \rangle + \langle N_{p_k} N_{n_l} \rangle + \langle N_{p_l} N_{n_k} \rangle) \\ &\quad - 4 \sum_i \frac{1}{\hat{j}_k^2} (\lambda_{11}(i, k) \langle A^\dagger(i0) A(k0) \rangle + \lambda_{02}(i, k) \langle A(i0) A(k0) \rangle) \delta_{kl}, \\ \mathcal{B}(k, l) &= -\frac{2\lambda_{02}(k, k)}{\hat{j}_k^2} \delta_{kl} + 2\lambda_{02}(k, l) + \frac{2\lambda_{02}(k, k)}{\hat{j}_k^4} (\langle N_{p_k} \rangle + \langle N_{n_k} \rangle) \delta_{kl}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\lambda_{02}(k, l)}{\hat{j}_k^2} (\langle N_{p_k} \rangle + \langle N_{n_k} \rangle) - \frac{2\lambda_{02}(k, l)}{\hat{j}_l^2} (\langle N_{p_l} \rangle + \langle N_{n_l} \rangle) \\
& + \frac{2\lambda_{02}(k, l)}{\hat{j}_k \hat{j}_l} (\langle N_{p_k} N_{p_l} \rangle + \langle N_{n_k} N_{n_l} \rangle + \langle N_{p_k} N_{n_l} \rangle + \langle N_{p_l} N_{n_k} \rangle) \\
& - 4 \sum_i \frac{1}{\hat{j}_k^2} (\lambda_{11}(i, k) \langle A(i0)A(k0) \rangle + \lambda_{02}(i, k) \langle A^\dagger(i0)A(k0) \rangle), \\
\mathcal{U}(k, l) & = \left\{ 1 - (\langle N_{p_k} \rangle + \langle N_{n_k} \rangle) \frac{1}{\hat{j}_k^2} \right\} \delta_{kl}. \tag{4.91}
\end{aligned}$$

Na výpočet stredných hodnôt operátorov vyskytujúcich sa v maticiach (4.91) potrebujeme poznať explicitné vyjadrenie vlnovej funkcie  $|RPA\rangle$ , pre ktorú platí QRPA podmienka

$$Q^{(m)}|RPA\rangle = 0. \tag{4.92}$$

Riešenie rovnice (4.92) v reálnom prípade vieme nájsť za predpokladu, že pracujeme s bozónovými operátormi  $B^\dagger(pn)$ ,  $B(pn)$ , ktoré spĺňajú príslušný komutačný vzťah  $[B(p_1n_1), B^\dagger(p_2n_2)] = \delta_{p_1p_2}\delta_{n_1n_2}$  [San65; Row68]. Tu už je nutné použiť prvú aproximáciu, v ktorej komutátor bifermiónových operátorov  $A^\dagger(pn0)$ ,  $A(pn0)$  nahradíme jeho strednou hodnotou v stave  $|RPA\rangle$ :

$$\begin{aligned}
[A(p_1n_10), A^\dagger(p_2n_20)] & \approx \langle RPA|[A(p_1n_10), A^\dagger(p_2n_20)]|RPA\rangle \\
& = \mathcal{U}(p_1n_1, p_2n_2) = \mathcal{U}(p_1n_1)\delta_{p_1p_2}\delta_{n_1n_2}. \tag{4.93}
\end{aligned}$$

Následná renormalizácia bifermiónových operátorov

$$\bar{A}^\dagger(pn0) = \mathcal{U}(pn)^{-1/2} A^\dagger(pn0), \quad \bar{A}(pn0) = \mathcal{U}(pn)^{-1/2} A(pn0), \tag{4.94}$$

zabezpečí ich bozónový charakter s príslušným komutačným vzťahom. Poznamenajme, že pre riešenie rovnice (4.92) je nutné renormalizovať aj fonónový operátor (4.88):  $Q^{\dagger(m)} = \sum_{pn} \{ \bar{X}_{pn}^{(m)} \bar{A}^\dagger(pn0) - \bar{Y}_{pn}^{(m)} \bar{A}(pn0) \}$ , v ktorom

$$\bar{X}_{pn}^{(m)} = \mathcal{U}(pn)^{1/2} X_{pn}^{(m)}, \quad \bar{Y}_{pn}^{(m)} = \mathcal{U}(pn)^{1/2} Y_{pn}^{(m)}. \tag{4.95}$$

Aplikovaním postupu ukázaného v [San65; Row68] dostávame nasledovné vyjadrenie QRPA vlnovej funkcie:

$$|RPA\rangle = \mathcal{N} e^{-\hat{F}} |BCS\rangle, \tag{4.96}$$

kde  $\mathcal{N}$  je normovací faktor,  $|BCS\rangle$  je vákuum pre operátory  $\bar{A}^\dagger(pn0)$ ,  $\bar{A}(pn0)$  a

$$\hat{F} = \frac{1}{2} \sum_{p_1n_1p_2n_2} \bar{D}(p_1n_1, p_2n_2; 0) \bar{A}^\dagger(p_1n_10) \bar{A}^\dagger(p_2n_20). \tag{4.97}$$

Matica  $\bar{D}(p_1n_1, p_2n_2; 0)$  určujúca korelácie vo vlnovej funkcii je daná sústavou rovníc

$$\bar{D}(p_1n_1, p_2n_2; 0) = \sum_m \bar{Y}_{p_1n_1}^{(m)} (\bar{X}_{p_2n_2}^{(m)})^{-1}. \tag{4.98}$$

Teraz, keď explicitne poznáme konštrukciu stavu  $|RPA\rangle$ , môžeme sa vrátiť k pôvodným bifermiónovým operátorom v jeho vyjadrení. S použitím vzťahov (4.94) a (4.95) získame pre faktor (4.97) rovnosť

$$\hat{F} = \frac{1}{2} \sum_{p_1 n_1 p_2 n_2} D(p_1 n_1, p_2 n_2; 0) A^\dagger(p_1 n_1 0) A^\dagger(p_2 n_2 0), \quad (4.99)$$

v ktorej nová matica korelačných koeficientov bude

$$\begin{aligned} D(p_1 n_1, p_2 n_2; 0) &= \mathcal{U}^{-1/2}(p_1 n_1) \bar{D}(p_1 n_1, p_2 n_2; 0) \mathcal{U}^{-1/2}(p_2 n_2) \\ &= \sum_m Y_{p_1 n_1}^{(m)} (X_{p_2 n_2}^{(m)})^{-1} \mathcal{U}^{-1}(p_2 n_2). \end{aligned} \quad (4.100)$$

QRPA vlnová funkcia je napokon určená rovnicami (4.96), (4.99) a (4.100).

Presný výpočet stredných hodnôt operátorov v odvodenom  $|RPA\rangle$  vákuu by vyžadoval sumáciu nekonečného počtu členov. Preto na tomto mieste uvažujeme druhé priblíženie: rozvoj QRPA vlnovej funkcie (4.96) po druhú mocninu korelačných koeficientov  $D(p_1 n_1, p_2 n_2; 0)$  a perturbatívny výpočet RPA maticových elementov so zanedbaním vyšších mocnín  $D(p_1 n_1, p_2 n_2; 0)$  (odtiaľ vyplýva označenie metódy PP2-QRPA). Stredné hodnoty operátorov v stave  $|RPA\rangle$  vystupujúce v QRPA maticiach (4.91) majú v tomto priblížení nasledovné vyjadrenia (znovu použijeme spoločné označenie protón–neutrónových konfigurácií jedným indexom):

$$\langle RPA | N_{p_k} | RPA \rangle = \langle RPA | N_{n_k} | RPA \rangle = \mathcal{N}^2 \left( \sum_i D^2(k, i; 0) - \frac{1}{\hat{j}_k^2} D^2(k, k; 0) \right),$$

$$\begin{aligned} \langle RPA | N_{p_k} N_{p_l} | RPA \rangle &= \langle RPA | N_{n_k} N_{n_l} | RPA \rangle = \langle RPA | N_{p_k} N_{n_l} | RPA \rangle \\ &= \mathcal{N}^2 \left( D^2(k, l; 0) + \left\{ \sum_i D^2(i, k; 0) - \frac{2}{\hat{j}_k^2} D^2(k, k; 0) \right\} \delta_{kl} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle RPA | A^\dagger(k0) A(l0) | RPA \rangle &= \mathcal{N}^2 \left( \sum_i D(i, k; 0) D(i, l; 0) + \frac{1}{\hat{j}_k^4} D^2(k, k; 0) \delta_{kl} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{1}{\hat{j}_k^2} D(k, k; 0) + \frac{1}{\hat{j}_l^2} D(l, l; 0) \right\} D(k, l; 0) \right), \end{aligned}$$

$$\langle RPA | A(k0) A(l0) | RPA \rangle = \mathcal{N}^2 \left( \frac{1}{\hat{j}_k^2} D(k, k; 0) \delta_{kl} - D(k, l; 0) \right), \quad (4.101)$$

kde pre normu  $\mathcal{N}$  platí

$$\mathcal{N}^{-2} = \left( 1 + \frac{1}{2} \sum_{k \leq l} D^2(k, l; 0) - \frac{1}{2} \sum_k \frac{1}{\hat{j}_k^2} D^2(k, k; 0) \right). \quad (4.102)$$

Z predchádzajúcich vzorcov vyplýva, že na výpočet QRPA matíc a riešenie modelovej rovnice (4.89) potrebujeme poznať korelačné koeficienty  $D(p_1 n_1, p_2 n_2; 0)$ .

Tieto spätne závisia od výsledkov (RPA amplitúd) získaných z rovnice (4.89). Preto načrtnutý nelineárny QRPA problém riešime iteračne. Pomocou zadaných vstupných hodnôt  $D(p_1n_1, p_2n_2; 0)$  vypočítame QRPA matice (4.91) a riešime QRPA rovnicu (4.89). Získané amplitúdy  $X_{pn}^{(m)}$  a  $Y_{pn}^{(m)}$  použijeme na výpočet nových elementov  $D(p_1n_1, p_2n_2; 0)$ . Procedúru opakujeme až po dosiahnutie konvergenzie hodnôt  $D(p_1n_1, p_2n_2; 0)$ . Pri riešení rovnice (4.89) postupujeme nasledovným spôsobom: prepíšeme ju do štandardného tvaru

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathcal{A}} & \bar{\mathcal{B}} \\ \bar{\mathcal{B}} & \bar{\mathcal{A}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}^{(m)} \\ \bar{Y}^{(m)} \end{pmatrix} = E_{RPA}^{(m)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}^{(m)} \\ \bar{Y}^{(m)} \end{pmatrix}, \quad (4.103)$$

v ktorom  $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{U}^{-1/2} \mathcal{A} \mathcal{U}^{-1/2}$ ,  $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{U}^{-1/2} \mathcal{B} \mathcal{U}^{-1/2}$  a amplitúdy  $\bar{X}^{(m)}$ ,  $\bar{Y}^{(m)}$  sú definované vzťahom (4.95). Rovnicu (4.103), s typickou QRPA normou na pravej strane, následne riešime diagonalizačným postupom definovaným v [RS80].

Metóda PP2-QRPA podobne ako RQRPA, nezachováva Ikedovo sumačné pravidlo (pozri kapitolu 2.2.2). Vyplýva to z toho, že matica  $\mathcal{U}(p_1n_1, p_2n_2)$  je tu počítaná presnejšie ako v štandardnom QRPA priblížení, kde rovnosť  $\mathcal{U}(p_1n_1, p_2n_2) = \delta_{p_1p_2} \delta_{n_1n_2}$  zabezpečovala exaktné splnenie spomenutého sumačného pravidla. Tento nedostatok v PP2-QRPA sa dá napraviť uvažovaním „self-konzistentnej“ varianty metódy PP2-QRPA (PP2-SQRPA) analogicky ako v prípade RQRPA [BKZ99]. Princíp „self-konzistentnej“ metódy spočíva v tom, že už pri riešení BCS rovnice (dodatok A) fixujeme Fermiho energiu  $\lambda_\tau$  správnym počtom častíc v stave  $|RPA\rangle$  a nie v  $|BCS\rangle$  vákuu. Táto požiadavka vedie na redefiníciu vzťahov (A.6):

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{p'} \langle RPA | a_p^\dagger a_{p'} | RPA \rangle = \sum_p \{ \hat{j}_p^2 v_p^2 + (1 - 2v_p^2) \langle RPA | N_p | RPA \rangle \}, \\ N &= \sum_{n'} \langle RPA | a_n^\dagger a_{n'} | RPA \rangle = \sum_n \{ \hat{j}_n^2 v_n^2 + (1 - 2v_n^2) \langle RPA | N_n | RPA \rangle \}, \end{aligned} \quad (4.104)$$

ako aj na korekciu výpočtu parametra  $\lambda_\tau$  (výraz (A.7)) v jednotlivých iteráciách numerického riešenia BCS rovnice. Analyticky sa dá ukázať, že pre Fermiho  $\beta$ -prechody, kde vďaka viazaniu bifermiónových operátorov (4.85) do nulového uhlového momentu platí rovnosť  $\langle RPA | N_p | RPA \rangle = \langle RPA | N_n | RPA \rangle$ , metóda PP2-SQRPA splňa Ikedovo sumačné pravidlo exaktne.

### 4.5.2 Jednoduché a dvojité $\beta$ -prechody, $2\nu\beta\beta$ -rozpad ${}^{76}\text{Ge}$

QRPA metódu prezentovanú v predchádzajúcej časti teraz aplikujeme na výpočet  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu jadra  ${}^{76}\text{Ge}$ . Dôraz bude kladený na štúdium citlivosti jednoduchých  $\beta$ -prechodov  ${}^{76}\text{Ge} \rightarrow {}^{76}\text{As}$ ,  ${}^{76}\text{Se} \rightarrow {}^{76}\text{As}$  a  $2\nu\beta\beta$ -premeny  ${}^{76}\text{Ge} \rightarrow {}^{76}\text{Se}$  na zmenu časticovo-časticovej interakcie v jadrovom hamiltoniáne (4.86). Po vyriešení QRPA rovnice (4.89) poznáme základný stav jadra  $(A, Z)$  a sadu  $m$  vzbudných stavov  $|0_m^\pm\rangle = Q^\dagger(m) |RPA\rangle$  jadra  $(A, Z \pm 1)$ . S použitím operátorov  $\beta_0^\pm$  z rovníc (4.83) môžeme pre amplitúdy jednoduchých  $\beta$ -prechodov zo základného stavu  $|RPA\rangle$  do

vzbudných stavov  $|0_m^+\rangle$  píšat:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_m^- &= \langle 0_m^+ | \beta_0^- | RPA \rangle = \langle RPA | [Q^{(m)}, \beta_0^-] | RPA \rangle \\ &= \sum_{pn} \tau(pn) (u_p v_n X_{pn}^{(m)} + v_p u_n Y_{pn}^{(m)}) \mathcal{U}(pn), \\ \mathcal{B}_m^+ &= \langle 0_m^+ | \beta_0^+ | RPA \rangle = \langle RPA | [Q^{(m)}, \beta_0^+] | RPA \rangle \\ &= \sum_{pn} \tau(pn) (u_n v_p X_{pn}^{(m)} + v_n u_p Y_{pn}^{(m)}) \mathcal{U}(pn).\end{aligned}\quad (4.105)$$

Praktický význam majú sily  $\beta$ -prechodov, ktoré sú definované ako štvorce príslušných amplitúd:  $S_m(\beta^-) = |\mathcal{B}_m^-|^2$ ,  $S_m(\beta^+) = |\mathcal{B}_m^+|^2$ . Definícia Fermiho maticového elementu  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu ( $M_F^{2\nu}$ ), využívajúca (QRPA) konštrukciu intermediálnych vzbudných stavov, je uvedená vo vzťahu (2.18). Za príslušný  $\beta$ -prechodový operátor  $A^F(0)$  tu dosadíme jeho vyjadrenie v sekundárnom kvantovaní (prvá rovnosť v (4.83)). Na výpočet elementu  $M_F^{2\nu}$  potrebujeme previesť dve nezávislé QRPA diagonalizácie (z iniciálneho a finálneho jadra). Tu prichádzame k problému neekvivalentnosti vzbudných stavov  $|0_{m_i}^+\rangle$ ,  $|0_{m_f}^+\rangle$  prechodového mnohonukleónového systému, konštruovaných z pôvodného ( $A, Z$ ) a výsledného ( $A, Z + 2$ ) jadra pri  $2\nu\beta\beta$ -premene, ktorý bol spomenutý už v úvode práce. Tento nedostatok sa rieši zavedením prekrytia stavov  $|0_{m_i}^+\rangle$  a  $|0_{m_f}^+\rangle$  do definície  $M_F^{2\nu}$  a nahradením excitačnej energie  $E_m$  jej priemernou hodnotou  $(E_{m_i} + E_{m_f})/2$ , ktorej zložky získame z QRPA výpočtov pre pôvodný a výsledný jadrový systém. Po tejto korekcii dostávame:

$$M_F^{2\nu} = \sum_{m_i m_f} \frac{\langle 0_f^+ | \beta_0^- | 0_{m_f}^+ \rangle \langle 0_{m_f}^+ | 0_{m_i}^+ \rangle \langle 0_{m_i}^+ | \beta_0^- | 0_i^+ \rangle}{\Omega_{m_i} + \Omega_{m_f}} = \sum_{m_i m_f} \frac{\mathcal{B}_{m_f}^+ \langle 0_{m_f}^+ | 0_{m_i}^+ \rangle \mathcal{B}_{m_i}^-}{\Omega_{m_i} + \Omega_{m_f}},\quad (4.106)$$

kde  $|0_i^+\rangle$  ( $|0_f^+\rangle$ ) je vlnová funkcia  $|RPA\rangle$  pôvodného (výsledného) jadra a

$$\Omega_{m_i} = \frac{E_{m_i} - E_i}{2}, \quad \Omega_{m_f} = \frac{E_{m_f} - E_f}{2}.\quad (4.107)$$

Faktor prekrytia  $\langle 0_{m_f}^+ | 0_{m_i}^+ \rangle$  má približné vyjadrenie [FŠ98; ŠPF98b]

$$\langle 0_{m_f}^+ | 0_{m_i}^+ \rangle = \sum_{pn} (\bar{X}_{pn}^{m_f} \bar{X}_{pn}^{m_i} - \bar{Y}_{pn}^{m_f} \bar{Y}_{pn}^{m_i}) \tilde{u}_p \tilde{u}_n,\quad (4.108)$$

v ktorom normované amplitúdy  $\bar{X}_{pn}^m$ ,  $\bar{Y}_{pn}^m$  sú definované rovnicami (4.95) a

$$\tilde{u}_\tau = u_\tau^i u_\tau^f + v_\tau^i v_\tau^f, \quad (\tau = p, n).\quad (4.109)$$

Index  $i$  ( $f$ ) označuje príslušnosť BCS faktorov  $u_\tau$ ,  $v_\tau$  k pôvodnému (výslednému) jadru pri  $2\nu\beta\beta$ -premene.

V numerických výpočtoch  $\beta$  a  $\beta\beta$ -prechodov sme použili rovnakú bázu dvanástich jednočasticových stavov pre protóny aj neutróny oboch uvažovaných jadier ( $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{76}\text{Se}$ ). Tvoria ju kompletne (2–4)  $\hbar\omega$  oscilátorové vrstvy:



$$1s_{1/2}, 0d_{3/2}, 0d_{5/2}, 1p_{1/2}, 1p_{3/2}, 0f_{5/2}, 0f_{7/2}, 2s_{1/2}, 1d_{3/2}, 1d_{5/2}, 0g_{7/2}, 0g_{9/2}.$$

Energie jednotlivých jednočasticových stavov boli počítané z Woods-Saxonovho potenciálu korigovaného Coulombovskou interakciou [T<sup>+</sup>79]. Následne sme riešili BCS rovnicu pre protóny a neutróny, pričom príslušné párovacie potenciály  $\Delta_p$ ,  $\Delta_n$  boli určené z empirických formúl [MN92]. Pre uvažované jadrá máme:

$$\begin{aligned} {}^{76}\text{Ge}: \quad \Delta_p &= 1.561 \text{ MeV}, \quad \Delta_n = 1.535 \text{ MeV}, \\ {}^{76}\text{Se}: \quad \Delta_p &= 1.751 \text{ MeV}, \quad \Delta_n = 1.710 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Na výpočet QRPA energií a vlnových funkcií potrebujeme poznať časticovo-časticovú (p-p,  $\kappa$ ) a časticovo-dierovú (p-h,  $\chi$ ) silu reziduálnej interakcie. Optimálne hodnoty týchto parametrov sa určujú z experimentálnych dát. Veľkosť  $\chi$  súvisí s polohou izobarického analógového stavu (pri budovaní  $0^+$  vzbuđených stavov) a s polohou Gamow-Tellerovej gigantickej rezonancie (pri opise  $1^+$  stavov). Hodnota  $\kappa$  sa pri uvažovaní konkrétneho  $2\nu\beta\beta$ -procesu určuje analýzou údajov o jednoduchých  $\beta$ -prechodoch z pôvodného a výsledného jadra.

Cieľom našej práce však nie je reprodukovať experimentálne polčasy  $\beta\beta$ -rozpadov s použitím parametrov hamiltoniánu odpovedajúcich realistickej situácii, ale štúdium stability a citlivosti prezentovanej metódy PP2-QRPA (PP2-SQRPA) na zmenu interakčných síl v hamiltoniáne a jej porovnanie s ostatnými dosiaľ používanými QRPA priblíženiami. Je známe, že QRPA výpočty jednoduchých a dvojitých  $\beta$ -prechodov vykazujú výraznú citlivosť na zmenu časticovo-časticovej interakcie  $\kappa$  pri danej sile  $\chi$  [VZ86; CFT87; FŠ98]. Preto aj v našej štúdiu fixujeme parameter  $\chi = 0.25 \text{ MeV}$ , ktorého veľkosť vyberáme z intervalu jeho možných fyzikálnych hodnôt [H<sup>+</sup>96] a silu  $\kappa$  považujeme za voľný parameter. Súčasťou testovania novej prezentovanej metódy PP2-QRPA, resp. PP2-SQRPA, je aj jej porovnanie s ostatnými používanými QRPA priblíženiami. Získané výsledky budeme konfrontovať s výpočtami v štandardnej QRPA metóde (QRPA), v renormalizovanej QRPA metóde (RQRPA) a jej „self-konzistentnej” verzii (SCQRPA), ktoré sú charakterizované v časti 2.2.2. Na ohodnotenie vplyvu presného výpočtu dvojitých komutátorov v maticiach  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{U}$  (4.90) v rámci PP2-QRPA uvažujeme aj QRPA metódu s exaktnými komutačnými vzťahmi (QRPA-EK). Princíp QRPA-EK je odlišný od štandardného QRPA priblíženia v tom, že najskôr sa presne vypočítajú komutátory obsiahnuté v maticiach  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{U}$  a potom sa vyjadria ich stredné hodnoty v  $|BCS\rangle$  vákuu. Pripomeňme, že v QRPA sa komutátory bifermiónových operátorov hneď nahrádzajú svojou strednou hodnotou v stave  $|BCS\rangle$ . QRPA-EK prístup modifikuje diagonálne členy matíc  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$  v porovnaní so štandardným prípadom ( $\mathcal{A}_{\text{stand}}$ ,  $\mathcal{B}_{\text{stand}}$ ) nasledovným spôsobom:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(p_1 n_1, p_2 n_2) &= \mathcal{A}_{\text{stand}} - \frac{2\lambda_{11}(p_1 n_1, p_2 n_2)}{\hat{j}_{p_1}^2} \delta_{p_1 p_2} \delta_{n_1 n_2}, \\ \mathcal{B}(p_1 n_1, p_2 n_2) &= \mathcal{B}_{\text{stand}} - \frac{2\lambda_{02}(p_1 n_1, p_2 n_2)}{\hat{j}_{p_1}^2} \delta_{p_1 p_2} \delta_{n_1 n_2}, \end{aligned} \quad (4.110)$$

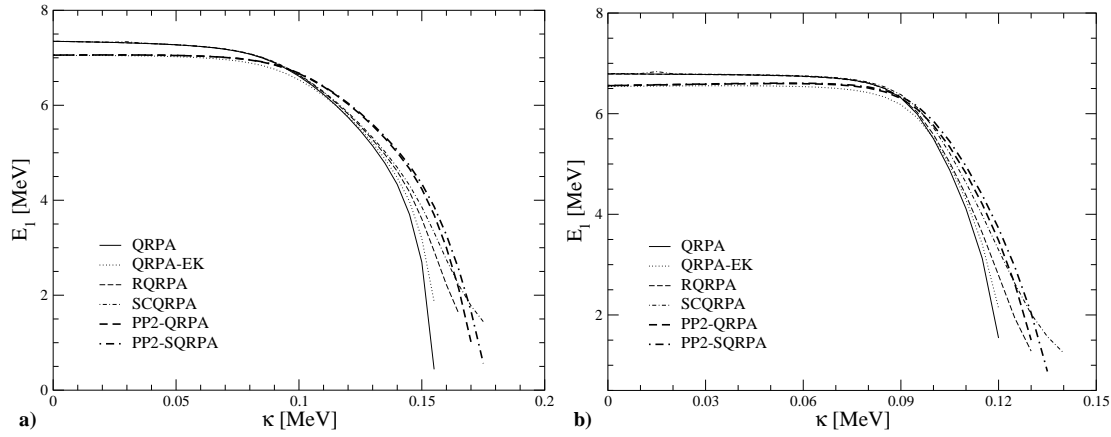
kde

$$\mathcal{A}_{\text{stand}} = (E_{p_1} + E_{n_1}) \delta_{p_1 p_2} \delta_{n_1 n_2} + 2\lambda_{11}(p_1 n_1, p_2 n_2), \quad \mathcal{B}_{\text{stand}} = 2\lambda_{02}(p_1 n_1, p_2 n_2). \quad (4.111)$$

Matica  $\mathcal{U}(p_1 n_1, p_2 n_2) = \delta_{p_1 p_2} \delta_{n_1 n_2}$  ostáva v QRPA-EK nezmenená.

Na grafe 4.25 je zobrazená prvá  $0^+$  excitačná energia ( $E_1$ ) jadra  $^{76}\text{As}$  v závislosti od parametra  $\kappa$ , počítaná z pôvodného ( $^{76}\text{Ge}$ ) a výsledného ( $^{76}\text{Se}$ ) jadrového systému. Porovnanie jednotlivých QRPA priblížení ukazuje, že pri výpočte  $E_1$  je

Obrázok 4.25: Energia prvého  $0^+$  vzбудeného stavu jadra  $^{76}\text{As}$  ako funkcia parametra  $\kappa$ . Graf a) znázorňuje výpočty z jadra  $^{76}\text{Ge}$ , graf b) z jadra  $^{76}\text{Se}$ . Označenie jednotlivých priblížení je vysvetlené v texte.



PP2-QRPA a PP2-SQRPA v oblasti väčších síl  $\kappa$  stabilnejšia ako všetky ostatné metódy. Hodnoty  $E_1$  určené v PP2-QRPA a PP2-SQRPA klesajú s rastúcou silou  $\kappa$  pomalšie ako v ostatných priblíženiach. Toto správanie je značné hlavne na energiách počítaných z pôvodného jadra (graf 4.25 a)). Zaujímavá situácia nastáva v oblasti malej sily  $\kappa$ , kde metódy s exaktným výpočtom dvojných komutátorov v RPA maticiach (QRPA-EK, PP2-QRPA, PP2-SQRPA) predpovedajú menšie hodnoty  $E_1$  ako ostatné priblíženia. Pozorovaný rozdiel na úrovni niekoľkých desiatín MeV je priamym dôsledkom lepšieho splnenia Pauliho princípu realizovaného presným vyjadrením komutátorov v QRPA maticiach (4.90). Zachovanie Pauliho princípu teda hrá dôležitú úlohu nielen pri veľkých hodnotách  $\kappa$ , kde má stabilizujúci účinok na QRPA riešenie, ale aj v oblasti malých síl p-p interakcie, kde ovplyvňuje a koriguje polohu energetického spektra. Tento efekt dosiaľ nebol v realistických výpočtoch pozorovaný, pretože QRPA aj RQRPA počíta predmetné komutátory v RPA maticiach aproximatívne. Z obrázku 4.25 tiež vyplýva, že v porovnaní s QRPA kolaps nových metód PP2-QRPA a PP2-SQRPA je posunutý do väčších hodnôt p-p interakcie  $\kappa$ , pričom výpočty z jadra  $^{76}\text{Se}$  kolabujú s rastúcim parametrom  $\kappa$  skôr ako výpočty z pôvodného jadrového systému. Kritické hodnoty p-p sily  $\kappa_c$ , pri ktorých dochádza ku kolapsu jednotlivých QRPA riešení sú uvedené

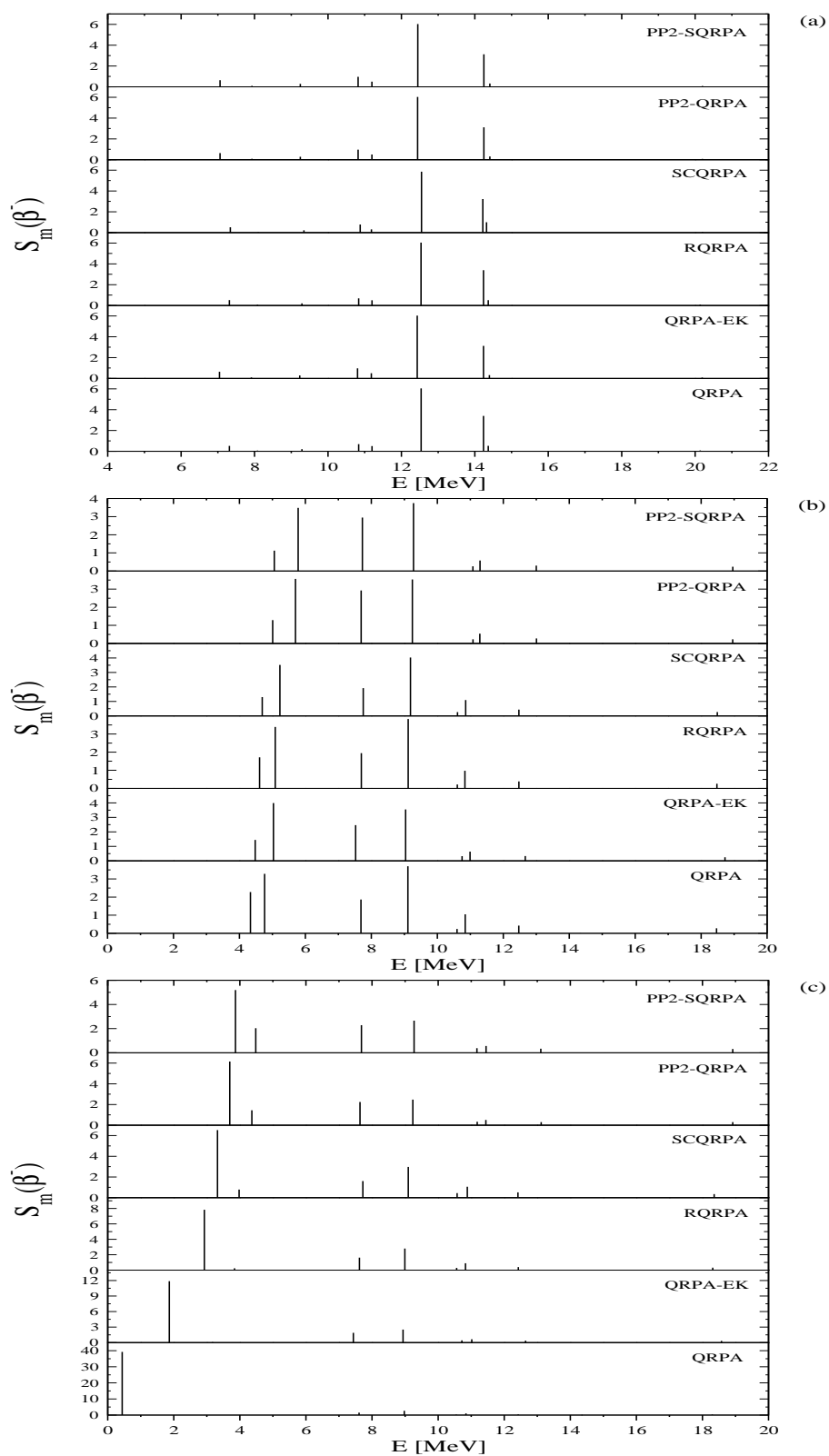
Tabuľka 4.4: Tabuľka kritických hodnôt  $\kappa_c$  časticovo–časticovej interakcie, pri ktorých dochádza ku kolapsu jednotlivých QRPA priblížení diskutovaných v texte.  $\kappa_c^{(i)}$  prislúcha výpočtom z iniciálneho jadra,  $\kappa_c^{(f)}$  výpočtom z finálneho jadra. Uvažovaná veľkosť p-h interakcie je  $\chi = 0.25\text{MeV}$ .

	QRPA	QRPA-EK	RQRPA	SCQRPA	PP2-QRPA	PP2-SQRPA
$\kappa_c^{(i)}$	0.155	0.155	0.165	0.175	0.170	0.175
$\kappa_c^{(f)}$	0.120	0.120	0.130	0.140	0.130	0.135

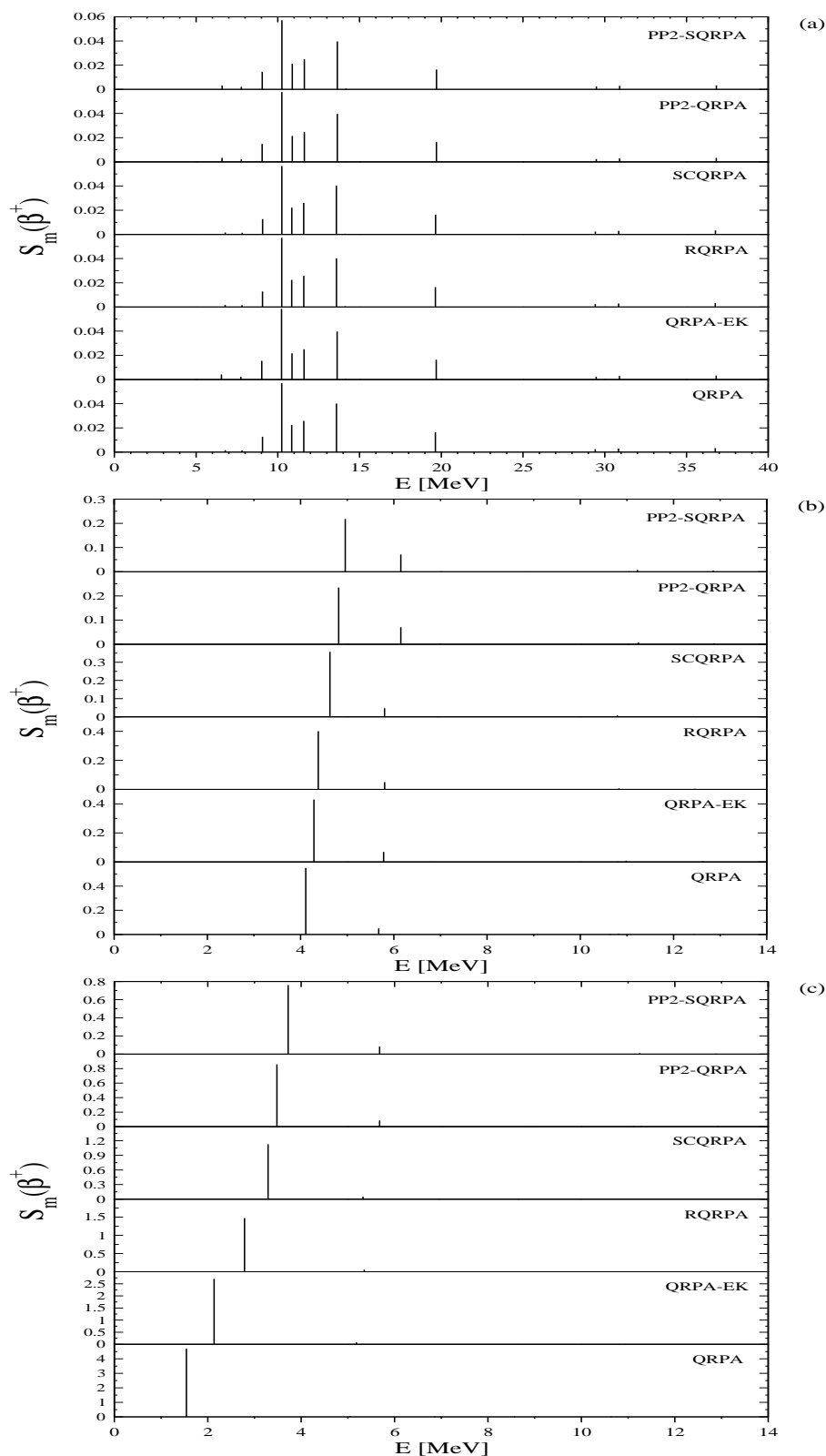
v tabuľke 4.4 s presnosťou 0.005 MeV. Vidíme, že na rozdiel od jednovrstvového modelu, kde nastáva kolaps PP2-QRPA skôr ako v prípade RQRPA [Š<sup>+</sup>00], v realistickom mnohovrstvovom modeli PP2-QRPA kolabuje ďalej (graf 4.25 a)) alebo v tom istom bode (graf 4.25 b)) ako RQRPA. U „self–konzistentných“ verzií RQRPA a PP2-QRPA metód je situácia opačná. Pri výpočtoch  $E_1$  z výsledného jadra sa dostávame ďalej v SCQRPA priblížení ako v PP2-SQRPA a po rovnaký bod  $\kappa_c$  pri výpočtoch z pôvodného jadra. Môžeme teda povedať, že RQRPA a PP2-QRPA (resp. SCQRPA a PP2-SQRPA) sú porovnateľné z hľadiska kolapsu riešenia. Čo sa týka citlivosti vypočítaných energií vzhľadom na zmenu p-p sily, stabilnejším sa javí nové PP2-QRPA (PP2-SQRPA) priblíženie.

Prejdime teraz k štúdiu jednoduchých  $\beta$ –premien. Na grafoch 4.26 sú znázornené sily  $\beta^-$ –prechodov  $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{As}$  v závislosti od excitačných energií jadra  $^{76}\text{As}$ . Ich výpočet sme previedli pre tri hodnoty p-p interakcie  $\kappa$ , vybrané z rôznych oblastí intervalu daného existenciou štandardného QRPA riešenia. Rovnako sme postupovali aj v prípade určenia  $\beta^+$  síl. Na obrázku 4.27 sú znázornené sily  $\beta^+$ –prechodov  $^{76}\text{Se} \rightarrow ^{76}\text{As}$  tiež ako funkcie excitačných energií jadra  $^{76}\text{As}$  pri troch rôznych veľkostiach  $\kappa$ . Z grafov 4.26 a), 4.27 a) vidíme, že malá p-p interakcia ( $\kappa = 0.03$  MeV) vedie na takmer degenerované výsledky u všetkých QRPA metód. Odlišnosti pozorujeme viac-menej len pri polohe najnižších  $\beta^\pm$  síl. Keď sa však presunieme do oblasti väčších hodnôt  $\kappa$ , kde sú evidentné výraznejšie rozdiely jednotlivých priblížení (grafy 4.26 b), 4.27 b)),  $\beta$ –premeny sa začínajú viac realizovať do nízkoľziacich stavov. Vidíme to hlavne na  $\beta^+$  silách, v ktorých sú prechody do vyšších stavov úplne potlačené. Grafy 4.26 c), 4.27 c) znázorňujú situáciu pri najväčšej p-p interakcii danej kolapsom štandardného QRPA riešenia. V prípade  $S_m(\beta^+)$  sa vo všetkých QRPA priblíženíach takmer celá sila sústreďuje v najnižšom  $\beta^+$ –prechode ( $m = 1$ ). Len nové metódy PP2-QRPA a PP2-SQRPA nechávajú vzhľadom na veľkosť  $S_1(\beta^+)$  nezanedbateľnú časť  $\beta^+$  sily aj v premene do vyššieho vzbudeného stavu  $m = 2$ . Sily  $S_m(\beta^-)$  majú tiež svoje maximum v najnižšom prechode, pričom v QRPA je to jediný nenulový prechod. V ostatných prípadoch pozorujeme  $\beta^-$ –premenu aj do vyšších vzbudených stavov. Voči presunu  $\beta^-$  síl do najnižších stavov je najviac odolná PP2-QRPA (PP2-SQRPA) metóda. Zaujímavé je, že už uvažovanie presných komutačných vzťahov v QRPA-EK stačí na to, aby sa všetka sila  $\beta^-$ –premeny v tomto prípade nepreniesla do najnižšieho

Obrázok 4.26: Sily  $\beta^-$ -prechodov  $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{As}$  v závislosti od excitačnej energie jadra  $^{76}\text{As}$  počítané pri hodnotách  $\kappa = 0.030$  MeV (a),  $\kappa = 0.140$  MeV (b),  $\kappa = 0.155$  MeV (c) a  $\chi = 0.25$  MeV. Výpočty sú realizované v šiestich rôznych QRPA priblíženiach opísaných v texte.



Obrázok 4.27: Sily  $\beta^+$ -prechodov  $^{76}\text{Se} \rightarrow ^{76}\text{As}$  v závislosti od excitačnej energie jadra  $^{76}\text{As}$  počítané pri hodnotách  $\kappa = 0.030$  MeV (a),  $\kappa = 0.110$  MeV (b),  $\kappa = 0.120$  MeV (c) a  $\chi = 0.25$  MeV. Ako v predchádzajúcom obrázku 4.26 aj tu porovnáваме šest' diskutovaných QRPA priblížení.



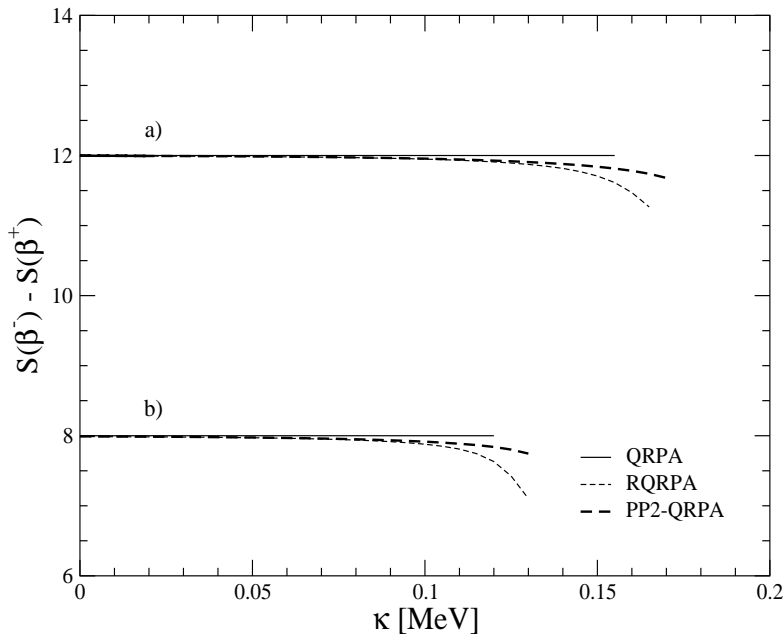
stavu, ale ostala distribuovaná aj do vyšších energetických úrovní jadra  $^{76}\text{As}$ . Treba poznamenať, že s nárastom p-p interakcie pozorujeme nielen premiestňovanie síl  $S_m(\beta^-)$  a  $S_m(\beta^+)$  do najnižšieho stavu, ale aj výrazné zväčšenie ich veľkostí – hlavne v QRPA. QRPA-EK v porovnaní s QRPA dokáže redukovať veľkosti  $\beta$  síl približne na polovicu ( $S_m(\beta^+)$ ), resp. tretinu ( $S_m(\beta^-)$ ) a najmenej sa toto zväčšenie prejaví v nových metódach PP2-QRPA a PP2-SQRPA. Porovnaním všetkých grafov a QRPA metód v obrázkoch 4.26 a 4.27 prichádzame k záveru, že PP2-QRPA a PP2-SQRPA priblíženie predpovedá spektrum síl jednoduchých  $\beta^\pm$ -prechodov, ktoré sa správa najstabilnejšie vzhľadom k zmene p-p interakcie  $\kappa$ , pri uvážení polohy spektra a veľkostí jednotlivých síl.

S výpočtom jednoduchých  $\beta^+$  a  $\beta^-$ -prechodov z daného jadra do všetkých vzbudných stavov susedných jadier súvisí Ikedovo sumačné pravidlo (viď kapitolu 2.2.2). Ak definujeme úplné  $\beta$ -sily vzťahmi  $S(\beta^-) = \sum_m S_m(\beta^-)$ ,  $S(\beta^+) = \sum_m S_m(\beta^+)$ , potom pre ne platí rovnosť

$$S(\beta^-) - S(\beta^+) = N - Z, \quad (4.112)$$

pričom  $N$  ( $Z$ ) je počet neutrónov (protónov) uvažovaného jadra. Toto pravidlo predstavuje dôležitý test mnohonukleónovej metódy použitej v realistických výpočtoch  $\beta$ -prechodov. Na grafe 4.28 je nakreslený rozdiel veličín  $S(\beta^-)$  a  $S(\beta^+)$  ako funkcia parametra p-p interakcie  $\kappa$ , počítaný z jadra  $^{76}\text{Ge}$ , kde  $N - Z = 12$

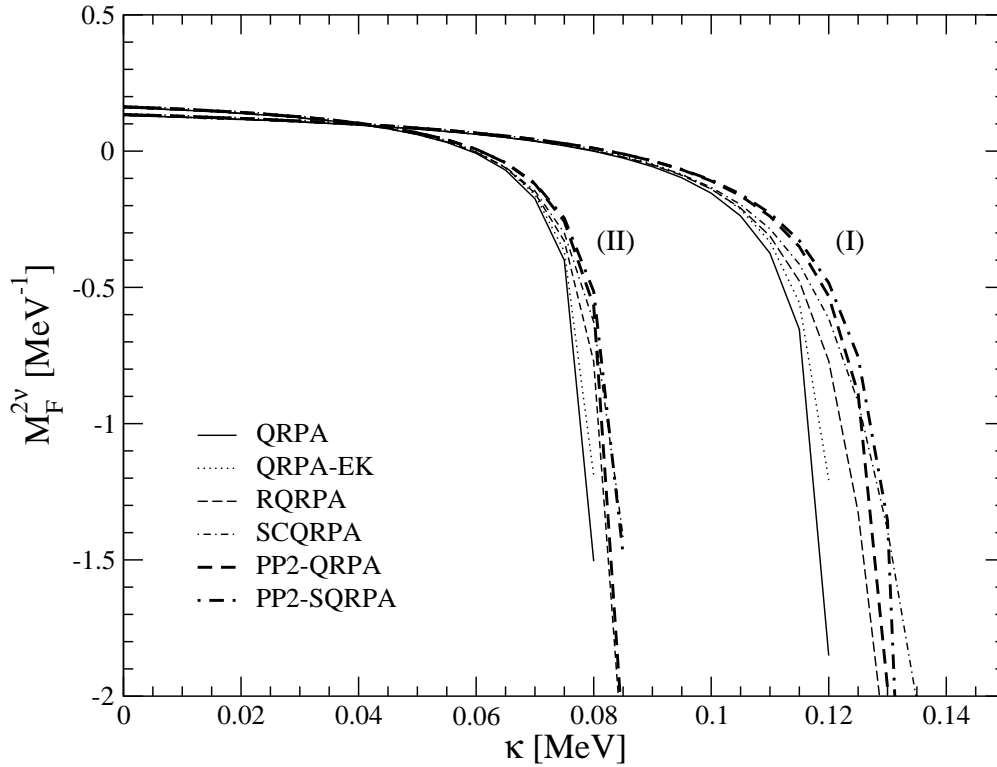
Obrázok 4.28: Test platnosti Ikedovho sumačného pravidla (4.112). Krivky **a)** odpovedajú výpočtom z jadra  $^{76}\text{Ge}$ , kde  $N - Z = 12$ , čiary **b)** prislúchajú testu z jadra  $^{76}\text{Se}$ , v ktorom  $N - Z = 8$ . Metódy QRPA-EK, SCQRPA a PP2-SQRPA neuvádzame, pretože podobne ako QRPA spĺňajú toto pravidlo presne.



a z jadra  $^{76}\text{Se}$ , v ktorom  $N - Z = 8$ . Ikedovo sumačné pravidlo testujeme v RQRPA a PP2-QRPA priblíženiach, pretože ostatné uvažované metódy (QRPA, QRPA-EK, SCQRPA, PP2-SQRPA) spĺňajú toto pravidlo z definície. Obrázok 4.28 ukazuje, že RQRPA ani PP2-QRPA nezachováva rovnosť (4.112). Rozdiely od predpokladaných hodnôt  $N - Z$  sa začínajú prejavovať približne pri silách p-p interakcie rovných polovici kritickéj hodnoty  $\kappa_c$  (v ktorej nastáva kolaps riešenia) a ďalej narastajú. RQRPA výsledky sa s rastúcim parametrom  $\kappa$  viac odlišujú od presných čísel ako predpovede získané v PP2-QRPA. Z toho možno usudzovať, že presný výpočet QRPA komutátorov vo fermiónovom priestore a zabezpečenie platnosti Pauliho princípu perturbatívnym spôsobom v PP2-QRPA reprezentuje lepšie priblíženie ku skutočnosti ako renormalizovaná kvázibozónová aproximácia použitá v RQRPA.

Poslednú časť numerického testovania prezentovaných metód PP2-QRPA a PP2-SQRPA predstavuje výpočet Fermiho maticového elementu  $2\nu\beta\beta$ -přeměny jadra  $^{76}\text{Ge}$  (vzťah (4.106)). Získané hodnoty v uvedených a aj ostatných porovnávacích QRPA priblíženiach sú načrtnuté na obrázku 4.29 v závislosti od parametra  $\kappa$ . Pri výpočtoch elementu  $M_F^{2\nu}$  skúmame vplyv veľkosti zvoleného modelového priestoru jednočasticových stavov na výsledok. Dosiaľ používaná konfigurácia dvanástich stavov (úplné  $(2-4)\hbar\omega$  oscilátorové vrstvy) prislúcha výpočtom (I) v grafe 4.29. Krivky (II) sú získané s použitím 21 jednočasticových úrovní (úplné  $(0-5)\hbar\omega$  oscilátorové vrstvy). Je známe, že väčší konfiguračný priestor stavov znamená väčšie množstvo korelácií v základnom stave  $|RPA\rangle$ , ktoré sa s rastúcou silou  $\kappa$  ešte zväčšujú. To v konečnom dôsledku spôsobuje posun kolapsu QRPA riešenia do menších hodnôt  $\kappa$  v porovnaní s výpočtami v menšom modelovom priestore stavov [FŠ98]. Na grafe 4.29 vidíme, že tomuto trendu podliehajú všetky QRPA priblíženia vrátane nových PP2-QRPA, PP2-SQRPA. Väčší konfiguračný priestor stavov tiež spôsobuje miernu modifikáciu hodnôt  $M_F^{2\nu}$  v oblasti malej sily p-p interakcie. Z kvalitatívneho hľadiska je priebeh vypočítaných elementov  $M_F^{2\nu}$  v jednotlivých QRPA aproximáciách podobný funkčnej závislosti  $E_1(\kappa)$  z grafov 4.25. Výsledky PP2-QRPA a PP2-SQRPA sa spomedzi uvažovaných priblížení javia ako najstabilnejšie v oblasti veľkých p-p síl pred samotným kolapsom príslušných riešení. Menšiu citlivosť  $2\nu\beta\beta$  maticových elementov na zmenu  $\kappa$  v porovnaní s QRPA vykazujú, popri známom RQRPA (SCQRPA) a nových prezentovaných metódach, aj QRPA-EK priblíženie. Z grafu 4.29 ďalej vyplýva, že v oblasti malých p-p síl dostávame v rámci daného modelového priestoru rovnaké hodnoty  $M_F^{2\nu}$  zo všetkých QRPA priblížení. To znamená, že rozdielna poloha prvého vzbudeného stavu v modeloch QRPA, RQRPA, SCQRPA a QRPA-EK, PP2-QRPA, PP2-SQRPA (viď graf 4.25) spôsobená aproximatívnym a presným vyjadrením dvojitého komutátorov z QRPA matic, nemá vplyv na výslednú hodnotu elementu  $M_F^{2\nu}$ . Môžeme povedať, že približné určenie predmetných komutátorov je v QRPA výpočtoch  $M_F^{2\nu}$  pri malej sily p-p interakcie ( $\kappa \ll \kappa_c$ ) postačujúce. Kritické hodnoty  $\kappa_c$  sú v prípade výsledkov (I) zhodné s parametrami  $\kappa_c^{(f)}$  z tabuľky 4.4, keďže výpočet  $2\nu\beta\beta$  maticového elementu je limitovaný kolapsom QRPA riešenia z finálneho jadra. Vo väčšom modelovom priestore (krivky (II) grafu 4.29) dochádza popri

Obrázok 4.29: Fermiho maticový element  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu jadra  $^{76}\text{Ge}$  ako funkcia p-p interakcie  $\kappa$  pri p-h interakcii  $\chi = 0.25$  MeV. Krivky (I) odpovedajú použitému konfiguračnému priestoru s 12 jednočasticovými stavmi, čiary (II) 21 úrovňovému modelovému priestoru v QRPA výpočtoch. Označenie jednotlivých QRPA priblížení je vysvetlené v texte.



zmenšeniu parametrov  $\kappa_c$  aj k ich zjednoteniu na úroveň 0.085 MeV v metódach PP2-QRPA, RQRPA a v ich „self-konzistentných” verziách. Vo výpočtoch QRPA a QRPA-EK má  $\kappa_c$  hodnotu 0.080 MeV. Väčší priestor konfiguračných stavov celkovo spôsobuje potlačenie rozdielov jednotlivých QRPA modifikácií pri výpočte maticového elementu  $M_F^{2\nu}$ .

Zhrňme teraz najdôležitejšie výsledky z tejto časti:

- (i) Novú metódu PP2-QRPA [Š<sup>+</sup>00], ktorá bola navrhnutá v protón-neutrónovom Lipkinovom modeli, sme rozpracovali v realistickom prípade. Použili sme jadrový hamiltonián so separabilnou zbytkovou interakciou vhodný na opis Fermiho jednoduchých a dvojitých  $\beta$ -prechodov [HHC96].
- (ii) PP2-QRPA sme aplikovali na výpočet spektra  $0^+$  vzbuđených stavov jadra  $^{76}\text{As}$ . Ďalej bola PP2-QRPA metóda testovaná a porovnávaná s existujúcimi QRPA priblíženiami (QRPA, RQRPA) vo výpočtoch jednoduchých  $\beta$ -prechodov  $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{As}$ ,  $^{76}\text{Se} \rightarrow ^{76}\text{As}$  a Fermiho maticového elementu



$2\nu\beta\beta$ -rozpadu jadra  $^{76}\text{Ge}$ .

- (iii) Porovnanie realistických PP2-QRPA výpočtov s ostatnými priblíženiami ukazuje, že PP2-QRPA poskytuje najstabilnejšie výsledky v oblasti veľkých hodnôt časticovo-časticovej interakcie ( $\kappa$ ) jadrového hamiltoniánu a spomedzi všetkých uvažovaných metód zabezpečuje najmenšie zmeny v spektre síl jednoduchých  $\beta$ -prechodov s rastúcim parametrom  $\kappa$ . Presný výpočet dvojných komutátorov v QRPA maticiach (4.90) v rámci PP2-QRPA metódy spôsobuje v porovnaní s QRPA, RQRPA výpočtami zmenu polohy prvej vzbudenej hladiny jadra pri malých hodnotách  $\kappa$ , ale nemá vplyv na výpočet maticového elementu  $2\nu\beta\beta$ -premeny v danej oblasti síl  $\kappa$ .
- (iv) PP2-QRPA riešenie vykazuje kolaps pri rovnakej alebo väčšej sile  $\kappa$  ako RQRPA riešenie. V tesnej blízkosti kolapsu PP2-QRPA pozorujeme vysokú citlivosť výsledkov na zmenu  $\kappa$ . Predpokladáme, že tento nedostatok by sa dal eliminovať uvažovaním ďalších členov v rozvoji  $|RPA\rangle$  vlnovej funkcie pri výpočte stredných hodnôt operátorov v QRPA maticiach.
- (v) PP2-QRPA nezachováva Ikedovo sumačné pravidlo (ISR) (4.112). Preto sme vytvorili „self-konzistentnú” variantu PP2-QRPA metódy (PP2-SQRPA), ktorá ISR pri Fermiho  $\beta$ -prechodoch splňa definatoricky. Výsledky získané v rámci PP2-SQRPA sú z hľadiska stability riešenia najlepšie spomedzi všetkých porovnávaných QRPA priblížení vrátane „self-konzistentnej” modifikácie RQRPA.

### 4.5.3 Diskusia

Jedným z hlavných problémov realistických QRPA výpočtov sú aproximácie, ktoré narušujú Pauliho vylučovací princíp. V prezentovanej kapitole 4.5 sme prvýkrát aplikovali QRPA metódu s perturbatívnym splnením Pauliho princípu (PP2-QRPA) a jej „self-konzistentnú” verziu PP2-SQRPA v realistických výpočtoch  $\beta$ - a  $\beta\beta$ -prechodov. Použitý bol hamiltonián (4.86) so separabilnou protón-neutrónovou reziduálnou interakciou. Nové QRPA priblíženia boli porovnávané s QRPA modifikáciami, ktoré sa v súčasnosti používajú na opis štruktúry jadra (QRPA, RQRPA a jej „self-konzistentná” verzia SCQRPA). Okrem toho sme analyzovali aj prípad QRPA metódy s presným vyjadrením komutátorov v QRPA maticiach a následným použitím  $|BCS\rangle$  základného stavu (QRPA-EK).

Platnosť Pauliho princípu je v PP2-QRPA zabezpečená perturbatívnym spôsobom. QRPA matice sú na rozdiel od súčasných používaných metód počítané vo fermiónovom priestore a s presným vyjadrením dvojných komutátorov. Približne je realizovaný až samotný výpočet stredných hodnôt operátorov v  $|RPA\rangle$  vákuu. Tu využívame vlnovú funkciu  $|RPA\rangle$  (4.96) odvodenú na základe renormalizovaného kvázibozónového priblíženia (4.93) a uvažujeme jej rozvoj do radu podľa mocnín korelačných faktorov  $D(p_1n_1, p_2n_2; 0)$ , pričom vo výrazoch pre dané stredné

hodnoty berieme ohraničenie po členy s druhou mocninou  $D(p_1n_1, p_2n_2; 0)$ . Tento prístup ukázal už v schématických štúdiách [Š<sup>+</sup>00] lepšiu stabilitu počítaných maticových elementov  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu v oblasti veľkej časticovo-časticovej (p-p) interakčnej sily  $\kappa$  v porovnaní s RQRPA výsledkami. Napriek tomu s rastúcou hodnotou  $\kappa$  PP2-QRPA tu vykazuje kolaps riešenia skôr ako RQRPA priblíženie.

V našich realistických výpočtoch produkujú PP2-QRPA a PP2-SQRPA metódy najstabilnejšie výsledky v danom regióne p-p síl spomedzi diskutovaných QRPA modelov. Dôležitá je tiež najlepšia odolnosť spektra síl jednoduchých  $\beta$ -prechodov voči zmene parametra  $\kappa$  v nových metódach. V súvislosti s  $\beta$ -prechodmi treba poznamenať, že PP2-QRPA modifikácia nezachováva Ikedovo sumačné pravidlo (ISR) (4.112), avšak jeho narušenie je tu menej ako polovičné vzhľadom k narušeniu v RQRPA (viď graf 4.28). PP2-SQRPA metóda spĺňa ISR pre Fermiho  $\beta$ -prechody exaktne podobne ako SCQRPA. Pripomeňme tiež, že presný výpočet komutátorov z QRPA matíc v metódach QRPA-EK, PP2-QRPA a PP2-SQRPA spôsobuje v oblasti malej p-p interakcie netypické zmenšenie hodnoty prvej excitačnej energie jadra ( $E_1$ ) v porovnaní s výsledkami ostatných QRPA priblížení, ktoré predpovedajú pri malej sile  $\kappa$  rovnaké hodnoty  $E_1$ . Tento posun prvej energetickej hladiny sa však neprejavuje na výpočte  $2\nu\beta\beta$  maticového elementu, kde všetky porovnávané QRPA modely poskytujú rovnaké výsledky.

Často diskutovaným problémom v súvislosti s QRPA metódou býva kolaps jej riešenia. Tento pozorujeme aj v PP2-QRPA a PP2-SQRPA výpočtoch. Z tabuľky 4.4 vyplýva, že na rozdiel od schématických výsledkov [Š<sup>+</sup>00] kolaps PP2-QRPA riešenia nastáva pri väčšej alebo rovnakej sile  $\kappa$  ako v RQRPA priblížení. Naopak PP2-SQRPA kolabuje pri menšej alebo rovnakej hodnote  $\kappa$  ako SCQRPA riešenie. Perturbatívny výpočet QRPA matíc v PP2-QRPA a PP2-SQRPA po kvadratické mocniny koeficientov  $D(p_1n_1, p_2n_2; 0)$  nie je dostatočný na to aby QRPA riešenie nevykazovalo kolaps alebo ho posunulo výrazne do väčších hodnôt  $\kappa$  v porovnaní s RQRPA, SCQRPA. Na dôvažok v tesnej blízkosti kolapsu riešenia PP2-QRPA a PP2-SQRPA pozorujeme prudký pokles hodnôt vypočítaných Fermiho maticových elementov  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu. Aby sa dosiahla menšia citlivosť počítaných veličín na zmenu  $\kappa$  v tejto oblasti p-p interakcie a tiež došlo k ďalšiemu posunu kolapsu PP2-QRPA do väčších p-p síl, je treba zlepšiť určovanie stredných hodnôt operátorov v QRPA maticiach, napríklad pripojením členov vyšších rádov z rozvoja vlnovej funkcie  $|RPA\rangle$  do ich výpočtu.

Na záver môžeme zhrnúť, že prezentovaná PP2-QRPA metóda je lepšia než RQRPA z hľadiska stability výsledkov voči zmene p-p sily  $\kappa$  a tiež z hľadiska polohy kolapsu QRPA riešenia. Porovnanie „self-konzistentných” metód PP2-SQRPA a SCQRPA takisto favorizuje PP2-SQRPA model vďaka väčšej stabilite získaných výsledkov, aj keď kritická („kolapsová”) hodnota p-p interakcie ( $\kappa_c$ ) je v PP2-SQRPA menšia, resp. rovná veľkosti  $\kappa_c$  v SCQRPA výpočtoch. Je preto opodstatnená motivácia použiť PP2-QRPA formalizmus aj na opis  $1^+$  vzbudných stavov jadra a uskutočniť výpočty Gamow-Tellerovho  $2\nu\beta\beta$  maticového elementu pre jadrové systémy, ktoré sú predmetom záujmu, za účelom korekcie súčasných QRPA predpovedí pre danú veličinu.

# Kapitola 5

## Záver

Predložená dizertačná práca sa venuje problému teoretického opisu jadrovej štruktúry v súvislosti s výpočtom jednoduchých a dvojitých  $\beta$ -prechodov. Prvé tri časti týkajúce sa prezentácie výsledkov práce sú venované vývoju nových QRPA modifikácií v schématických modeloch. Konkrétne ide o novú QRPA metódu s optimalizovanou definíciou základného stavu jadra, zavedenie vhodných nelineárnych členov do fonónového operátora za účelom lepšieho opisu vzbudенých stavov v rámci QRPA, ako aj prvú realizáciu výpočtov jadrovej štruktúry pomocou nedávno navrhnutej QRPA metódy, ktorá umožňuje univerzálne zabezpečiť platnosť Ikedovho sumačného pravidla pri konštrukcii jednoduchých  $\beta$ -prechodov. V ďalších dvoch častiach výsledkov je prezentovaný netradičný výpočet maticového elementu  $2\nu\beta\beta$ -premeny v integrálnej reprezentácii a aplikácia QRPA modelu s perturbatívnym zabezpečením platnosti Pauliho vylučovacieho princípu v realistikom výpočte  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu jadra  $^{76}\text{Ge}$ .

Nová definícia QRPA vlnovej funkcie, realizovaná v kapitole 4.1, umožnila optimálne určenie základného stavu jadra pomocou minimalizácie jemu prislúchajúcej energie. Tento postup použitý v novovytvorenej QRPA modifikácii (QRPA-OGS) viedol k záveru, že kolaps štandardného QRPA riešenia súvisí s reorganizáciou mnohonukleónového systému do nového základného stavu. Uvedený jav bol dosiaľ indikovaný len v semiklasickom opise jadrových excitácií [R<sup>+</sup>00]. V oblasti veľkých hodnôt časticovo-časticovej interakcie za kolapsom štandardných QRPA výpočtov boli v rámci QRPA-OGS nájdené nové kolektívne módy – QRPA riešenia. Vznikajú vďaka novej definícii QRPA vlnovej funkcie. Jedno zo získaných riešení poskytuje dobrú predpoveď exaktných výsledkov. Druhé riešenie je podobné semiklasickému [R<sup>+</sup>00] a súvisí s harmonickými vibráciami okolo základného stavu jadra.

V časti 4.2 sme ukázali, že pomocou QRPA metódy je možné úplne reprodukovať energetické spektrum získané diagonalizáciou modelového hamiltoniánu. Zhoda s exaktnými výsledkami bola dosiahnutá rozšírením bežne používaného lineárneho tvaru QRPA fonónového operátora o vhodné nelineárne členy. Ukázalo sa, že v rámci QRPA sa realizuje presný výpočet nepárnych vzbudенých stavov a TDA podobným postupom získame opis párnych excitovaných stavov. Dosiahnutá pres-

ná predpoveď exaktných výsledkov znamená, že QRPA metóda je schopná dobre opísať aj neharmonické efekty prítomné vo vzbudených stavoch. Poznamenajme, že reprodukcia párných vzbudených stavov v rámci TDA typu rovníc predstavuje silnú motiváciu použitia uvedenej metódy na výpočet reálnych dvojfónových excitácií. Daná úloha je dôležitá pre opis  $\beta\beta$ -prechodov do vzbudených koncových stavov. Ich dvojfónová štruktúra sa dosiaľ počíta len veľmi približne. Predpokladáme, že prezentované QRPA výpočty budú mať aj ďalšiu užitočnú realistickú aplikáciu. Pomocou vypočítaných jedno a dvojfónových vzbudených stavov sa dá skonštruovať  $2\nu\beta\beta$ maticový element (M.E.), vychádzajúc zo základného stavu konečného jadra ( $A, Z + 2$ ), ktoré je reprezentované vlnovou funkciou  $|rpa\rangle$ . Počiatočné jadro ( $A, Z$ ) (prechodové jadro ( $A, Z + 1$ )) je stotožnené s dvojfónovým (jednofónovým) stavom konštruovaným z konečného systému ( $A, Z + 2$ ) v rámci protón–neutrónovej QRPA metódy. Spomenutý spôsob určenia M.E. nie je zaťažovaný dvojkávuovým problémom a predstavuje alternatívu k štandardnému postupu dvoch QRPA diagonalizácií z pôvodného a výsledného jadra.

Úloha tzv. rozptylových členov v jadrovom hamiltoniáne bola študovaná v časti 4.3. V dôsledku použitého kvázibozónového priblíženia je štandardný a renormalizovaný QRPA výpočet na uvedené operátory necitlivý. V QRPA modifikácii PP2-QRPA [Š<sup>+</sup>00], ktorá je formulovaná vo fermiónovom priestore, ako aj v exaktnom výpočte danom diagonalizáciou modelového hamiltoniánu, sú príspevky od rozptylových členov nenulové. Ukázalo sa však, že ich vplyv na predpovedané excitačné energie v rámci uvažovaných metód je malý. Tiež sa nepotvrdila hypotéza rekonštrukcie Ikedovho sumačného pravidla (ISR) pri zahrnutí rozptylových operátorov do výpočtov jednoduchých  $\beta$ -prechodov. Pre obnovenie platnosti ISR v uvažovaných metódach je podstatná „self-konzistentná“ modifikácia BCS amplitúd  $v_\tau, u_\tau$  ( $\tau = p, n$ ) [BKZ99; BKZ00] na základe požiadavky zachovania počtu častíc na úrovni základného stavu (v PP2-QRPA alebo exaktných výpočtoch). Ďalej sme sústredili našu pozornosť na Plne renormalizovanú QRPA metódu (FR-QRPA) [RF02]. Ide o model s univerzálnym zabezpečením platnosti ISR, ktorý však dosiaľ nebol numericky realizovaný. S použitím SO(5) symetrického modelového hamiltoniánu [KS88; HHC97] sme získali vôbec prvé riešenie FR-QRPA systému rovníc a študovali jeho správanie sa vo výpočtoch excitačnej energie, stredného počtu kvázičastíc v základnom stave a maticového elementu  $2\nu\beta\beta$ -prechodu. Analyzovali sme tiež vplyv rozptylových operátorov hamiltoniánu a rôznych tvarov základného stavu  $|rpa\rangle$  na FR-QRPA predpoveď Fermiho  $2\nu\beta\beta$  maticového elementu. V rámci štúdia ohraničení FR-QRPA metódy sme ukázali, že jej aplikácia je v prípade  $v_n \rightarrow v_p$  (respektíve  $N = Z$ ) problematická a otázna v dôsledku divergencie FR-QRPA matíc, ktorú nebolo možné eliminovať pomocou uvažovaných definícií FR-QRPA základného stavu.

V predposlednej kapitole výsledkov sme uskutočnili výpočet síl jednoduchých  $\beta$ -prechodov a Fermiho  $2\nu\beta\beta$  maticového elementu ( $M_F^{2\nu}$ ) v integrálnej reprezentácii. Približný bozónový obraz protón–neutrónového Lipkinovho modelu umožnil získať presné vyjadrenia potrebných časovo závislých  $\beta$ -prechodových operátorov. Bolo zistené, že v integrálnych výpočtoch jednoduchých a dvojitých  $\beta$ -prechodov

sú dôležité vyššie členy z bozónovej expanzie hamiltoniánu alebo príslušných  $\beta$ -operátorov. Realizáciou druhej možnosti sme získali veľmi dobrú predpoveď exaktných hodnôt  $\beta$  silových funkcií v študovanej oblasti reziduálnej časticovo-časticovej interakcie. Významnou črtou integrálneho výpočtu  $2\nu\beta\beta$  maticového elementu je možnosť separácie jeho fyzikálne relevantnej časti v súvislosti s  $2\nu\beta\beta$ -procesom. Ukázalo sa, že fyzikálny príspevok do elementu  $M_F^{2\nu}$  je významne potlačený v oblasti malej časticovo-časticovej ( $p$ - $p$ ) interakcie medzi nukleónmi a svoje maximum nadobúda v okolí kolapsu štandardných QRPA hodnôt  $M_F^{2\nu}$ . Je tiež podstatne menej citlivý na zmenu  $p$ - $p$  sily ako QRPA výsledky. Nefyzikálna časť  $M_F^{2\nu}$  je dominantná pri malej hodnote  $p$ - $p$  interakcie a porovnateľná so štandardnými QRPA výsledkami. Z toho vyplýva, že QRPA predpoveď  $M_F^{2\nu}$  je skreslená a významne ovplyvnená príspevkom, ktorý nie je zodpovedný za  $2\nu\beta\beta$ -premenu.

Náplňou poslednej kapitoly 4.5 bola prvá aplikácia QRPA metódy s perturbatívnym splnením Pauliho vylučovacieho princípu v realistickom výpočte jednoduchých a dvojitých Fermiho  $\beta$ -prechodov. Daný model (označený PP2-QRPA) počíta QRPA maticové elementy pomocou rozvoja vlnovej funkcie  $|RPA\rangle$  do radu podľa mocnín príslušného korelačného koeficientu s ohraničením po kvadratické členy. Uvedené PP2-QRPA priblíženie bolo navrhnuté v schématických štúdiách [Š<sup>+</sup>00] a je možné ho aplikovať na realistický výpočet štruktúry jadra. PP2-QRPA metódu sme použili na opis  $\beta$ -prechodov  $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{As}$ ,  $^{76}\text{Se} \rightarrow ^{76}\text{As}$  a  $2\nu\beta\beta$ -premeny jadra  $^{76}\text{Ge}$ . V porovnaní s dosiaľ používanými QRPA modifikáciami (QRPA, RQRPA, „self-konzistentná RQRPA“) boli získané stabilnejšie výsledky predpovedaných veličín voči zmene sily časticovo-časticovej nukleón-nukleónovej interakcie ( $\kappa$ ). Najlepšia odolnosť PP2-QRPA výsledkov vzhľadom k variácii  $\kappa$  je dobre pozorovateľná vo výpočte silových funkcií jednoduchých  $\beta$ -prechodov a ukazuje na správnosť myšlienky perturbatívneho spôsobu výpočtu QRPA matíc. Predpokladáme, že zahrnutie väčšieho počtu členov z rozvoja základného stavu  $|RPA\rangle$  v rámci PP-QRPA by viedlo k ďalšiemu zlepšeniu a stabilizácii predpovedí pre uvažované veličiny. Hodnotenie dosiahnutých výsledkov môžeme uzavrieť konštatovaním, že prezentovaná PP2-QRPA metóda sa javí ako vhodný model na realistický výpočet  $2\nu\beta\beta$  maticových elementov.

*Zhrnutie hlavných dosiahnutých výsledkov predkladanej dizertačnej práce:*

- Zavedením nových stupňov voľnosti do RPA vlnovej funkcie bola navrhnutá modifikácia QRPA metódy, ktorá umožňuje optimalizáciu RPA základného stavu, tzv. QRPA-OGS.
- V rámci navrhutej QRPA-OGS metódy boli nájdené nové kolektívne módy (riešenia) v oblasti  $p$ - $p$  interakcie za kolapsom štandardného QRPA výpočtu. Jedno z riešení dobre reprodukuje exaktné výsledky pre veľké hodnoty  $p$ - $p$  interakcie. Druhé riešenie je v dobrej zhode s výsledkom výpočtu časovo závislej Schrödingerovej rovnice [R<sup>+</sup>00], ktorá opisuje harmonické vzbudenia.
- Analýza základného stavu v rámci QRPA-OGS ukázala, že problém kolapsu štandardnej QRPA metódy súvisí s reorganizáciou v štruktúre základného stavu.
- Bolo ukázané, že zahrnutie nelineárnych členov do fonónového operátora v rámci

QRPA metódy má svoje opodstatnenie a vedie na lepší popis vzbuđených stavov jadra.

- V rámci protón–neutrónového Lipkinovho modelu bolo demonštrované, že zahrnutím nelineárnych členov do QRPA fonónového operátora je možný súčasný opis nepárnych vzbuđených stavov, ktorých charakter je označovaný ako 1-, 3-, ... $(2n + 1)$ -fonónový.
- V protón–neutrónovom Lipkinovom modeli bolo ukázané, že pomocou nového typu fonónového operátora, ktorý vedie na TDA podobnú rovnicu, sú reprodukovateľné exaktné dvojfonónové stavy.
- Bola navrhnutá štruktúra fonónových operátorov pre opis stavov označovaných za 2-, 4-, ... $(2n)$ -fonónové, pomocou rovnice typu TDA.
- Na výpočet maticového elementu  $2\nu\beta\beta$ -prechodu bol navrhnutý postup, ktorý pomocou zlepšeného opisu dvojfonónového stavu v rámci protón–neutrónového QRPA prístupu umožňuje vyhnúť sa dvojvákuovému priblíženiu, ktorého nepresnosti nie sú dobre známe.
- Po prvýkrát bolo ukázané, že v rámci QRPA metódy je možné reprodukovateľné exaktné riešenia hamiltoniánu, získané jeho diagonalizáciou, t.j., že QRPA metóda nie je teória s ohraničením len na malé variácie RPA amplitúd.
- Bola skúmaná podstata zachovania Ikedovho sumačného pravidla (ISR) [IUY65]. Bolo demonštrované, že rozptylové členy hamiltoniánu zohrávajú vedľajšiu funkciu a že významnú úlohu z hľadiska splnenia ISR hrá „self–konzistentná” modifikácia stredného poľa zavedením požiadavky na zachovanie počtu častíc na úrovni RPA základného stavu. Vplyv zachovania ISR na výpočet fyzikálnych veličín bol študovaný v prípade rôznych modifikácií QRPA metódy.
- Bol prevedený prvý numerický výpočet v rámci nedávno navrhutej metódy *Plne renormalizovaná QRPA* [RF02], ktorá zabezpečuje splnenie ISR. Za týmto účelom boli navrhnuté rôzne predpisy RPA vlnovej funkcie, umožňujúce približné riešenie QRPA rovnice pre základný stav. Ohraničenia uvedenej metódy boli študované v rámci  $SO(5)$  modelu.
- Využitím aparátu integrálnej reprezentácie  $\beta$  silových funkcií a maticového elementu  $2\nu\beta\beta$ -rozpadu bol uskutočnený výpočet týchto veličín bez bežnej konštrukcie intermediálnych stavov v uvažovanom schématickom modeli.
- Porovnaním vypočítaných  $\beta$  silových funkcií v integrálnej reprezentácii s exaktným riešením bola zistená veľmi dobrá zhoda s presnými hodnotami v študovanej oblasti  $p$ - $p$  interakcie.
- Porovnaním  $2\nu\beta\beta$  Fermiho maticového elementu, vypočítaného integrálnou reprezentáciou, s QRPA výsledkami bolo ukázané, že dvojvákuové priblíženie v QRPA prístupoch má za následok zahrnutie veľkého nefyzikálneho príspevku.
- Nedávno navrhnutá metóda *QRPA s perturbatívnym splnením Pauliho vylučovacieho princípu* (PP-QRPA) [Š<sup>+</sup>00] v rámci protón–neutrónového Lipkinovho modelu bola aplikovaná na realistický výpočet  $\beta^-$  a  $\beta^+$  Fermiho prechodov pre jadrá s  $A = 76$  podliehajúce dvojitému  $\beta$ -rozpadu.
- Bolo ukázané, že zlepšeným splnením Pauliho princípu v rámci PP-QRPA metódy sa stabilita získaných riešení vzhľadom na parametre jadrového hamiltoniánu

podstatne zlepšila v porovnaní s druhými QRPA metódami používanými na realistický opis jadrových prechodov.

*Na záver dodajme, že stanovené ciele, opísané v tretej kapitole, boli v dizertačnej práci splnené. Prezentovali sme nové postupy, ktorých ambíciou je významne prispieť k lepšiemu a hodnovernejšiemu opisu jadrovej štruktúry a výpočtu pravdepodobnosti jednoduchej a dvojitej  $\beta$ -premeny jadier. Väčšina uvedených výsledkov bola publikovaná alebo je pripravená na publikáciu v odborných časopisoch.*

# Dodatok A

## BCS rovnica

Teoretický opis párových korelácií v jadrách sa realizuje v rámci BCS<sup>1</sup> modelu [RS80]. V našej práci uvažujeme len protón–protónové (p–p) a neutrón–neutrónové (n–n) párovanie. Modelový hamiltonián má tvar

$$H = H_p + H_n, \quad (\text{A.1})$$

kde  $H_p$  a  $H_n$  sú definované vzťahom (4.77). Dôležitou črtou BCS modelu je zavedenie kvázičastíc a transformácie, ktorá dáva do súvisu časticové ( $c_{\tau'}^\dagger, c_{\tau'}$ ) a kvázičasticové ( $\alpha_{\tau'}^\dagger, \alpha_{\tau'}$ ) operátory (rovnica (4.79)). Index  $\tau'$  reprezentuje kvantové čísla  $n_{\tau'}, l_{\tau'}, j_{\tau'}, m_{\tau'}$  ako aj projekciu izospinu ( $p, n$ ). Označenie  $\tau$  znamená rovnakú sadu kvantových čísel, ale bez hodnoty  $m_{\tau}$ . Použitím metodiky rovnice pohybu pri prepise hamiltoniánu (A.1) do kvázičasticovej reprezentácie dostávame BCS rovnicu [Goo79]

$$\begin{pmatrix} \epsilon_\tau - \lambda_\tau & \Delta_\tau \\ \Delta_\tau & -(\epsilon_\tau - \lambda_\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\tau \\ v_\tau \end{pmatrix} = E_\tau \begin{pmatrix} u_\tau \\ v_\tau \end{pmatrix}, \quad (\tau = p, n), \quad (\text{A.2})$$

kde  $\epsilon_\tau$  je energia jednočasticových stavov (získaná napríklad z Woods–Saxonovho potenciálu),  $v_\tau, u_\tau$  sú obsadzovacie amplitúdy,  $E_\tau$  je energia kvázičastíc a  $\Delta_\tau$  je párovací potenciál (energetická medzera):

$$\Delta_\tau = \frac{1}{2} G_\tau \sum_\nu u_\nu v_\nu (2j_\nu + 1). \quad (\text{A.3})$$

Langrangeov parameter  $\lambda_\tau$  má zmysel Fermiho energie. Je fixovaný správnym počtom častíc v stave  $|BCS\rangle$ , pričom vlnová funkcia  $|BCS\rangle$  je definovaná ako vákuum pre kvázičasticové operátory [ $\alpha_{\tau'}|BCS\rangle = 0$ ]. Diagonalizáciou BCS rovnice (A.2) (uvažujeme len riešenia s kladnou energiou) získame energie kvázičastíc

$$E_\tau = \sqrt{(\epsilon_\tau - \lambda_\tau)^2 + \Delta_\tau^2}, \quad (\text{A.4})$$

---

<sup>1</sup>Bardeen–Cooper–Schrieffer



a pravdepodobnosti obsadenia jednotlivých stavov

$$v_\tau^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\epsilon_\tau - \lambda_\tau}{E_\tau} \right), \quad u_\tau^2 = 1 - v_\tau^2. \quad (\text{A.5})$$

Pre počet protónov ( $Z$ ) a neutrónov ( $N$ ) potom platí

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{p'} \langle BCS | a_{p'}^\dagger a_{p'} | BCS \rangle = \sum_p \hat{j}_p^2 v_p^2, \\ N &= \sum_{n'} \langle BCS | a_{n'}^\dagger a_{n'} | BCS \rangle = \sum_n \hat{j}_n^2 v_n^2, \quad \hat{j}_\tau = \sqrt{2j_\tau + 1}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Zo vzťahov (A.4) a (A.5) vidíme, že BCS rovnica je nelineárna. Jej riešenie s fixovanými hodnotami protónovej a neutrónovej energetickej medzere  $\Delta_p$  a  $\Delta_n$  (na základe experimentálnych údajov) získame iterovaním parametra  $\lambda_\tau$  spĺňajúc v každom kroku podmienku (A.6) pre správny počet častíc. Presnejšie, pomocou štartovacej hodnoty  $\lambda_\tau$  určíme kvázičasticové energie (A.4) a následne vypočítame nové  $\lambda_\tau$  pre ďalšiu iteráciu zo vzťahu:

$$\lambda_\tau = \left( N_\tau - \sum_\tau \frac{\hat{j}_\tau^2}{2} \left( 1 - \frac{\epsilon_\tau}{E_\tau} \right) \right) \frac{1}{\sum_\tau \frac{\hat{j}_\tau^2}{2E_\tau}}, \quad (\text{A.7})$$

kde  $N_\tau = N$  pre  $\tau = n$  a  $N_\tau = Z$  pre  $\tau = p$ . Rovnicu (A.7) sme získali dosadením pravdepodobnosti  $v_\tau^2$  (výraz (A.5)) do vzťahov (A.6) a vyjadrením parametra  $\lambda_\tau$ .

# Dodatok B

## Marumoriho bozónové mapovanie fermiónových operátorov

Jadrovo–štruktúrne metódy prezentované v kapitolách 4.1 a 4.4 sú budované v bozónovom priestore. Vyžadujú preto konštrukciu bozónových obrazov potrebných fermiónových operátorov. Spomedzi viacerých existujúcich postupov [RS80] využívame v našom prípade Marumoriho princíp [SS97] mapovania fermiónového operátora do bozónového priestoru.

Uvažujme bozónový kreačný (anihilačný) operátor  $B^\dagger$  ( $B$ ) a jemu prislúchajúce vákuum  $|0\rangle$ . Ďalej definujme priestor ortonormálnych bozónových stavov:

$$\mathbf{B} \equiv \left\{ |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^\dagger)^n |0\rangle, \quad 0 \leq n \leq 2\Omega \right\}, \quad (\text{B.1})$$

pričom  $2\Omega = 2j + 1$  je degenerácia uvažovanej  $j$ -vrstvy v danom modeli. Jednoznačnú korešpondenciu medzi fermiónovým priestorom stavov (2.51) a bozónovou bázou (B.1) zabezpečuje nasledovný princíp: bozónový obraz ( $O_B$ ) fermiónového operátora  $O_F$  je definovaný tak, že všetky vlastné hodnoty  $O_F$  v priestore (2.51) sú zároveň vlastnými hodnotami operátora  $O_B$  v  $\mathbf{B}$ . To znamená:

$$\langle n | O_F | n' \rangle = \langle n | O_B | n' \rangle, \quad 0 \leq n, n' \leq 2\Omega, \quad (\text{B.2})$$

kde  $|n\rangle$  je stav z fermiónovej bázy (2.51). Uvedená rovnosť maticových elementov v oboch priestoroch jednoznačne definuje operátor  $O_B$  na základe známeho tvaru  $O_F$  a ortogonalít stavov vo fermiónovej a bozónovej báze.

Uveďme teraz príklad mapovania operátora  $A^\dagger$ . Pre jeho bozónový obraz môžeme všeobecne písať:

$$A^\dagger = \sum_{ij} \alpha_{ij} (B^\dagger)^i (B)^j. \quad (\text{B.3})$$

Jednotlivé koeficienty  $\alpha_{ij}$  sa určia z podmienky (B.2). Pre niekoľko prvých členov radu (B.3) máme:

$$\begin{aligned} \alpha_{10} &= \langle 1 | A^\dagger | 0 \rangle / \langle 1 | B^\dagger | 0 \rangle = 1, & \alpha_{01} &= \alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{22} = 0, \\ \alpha_{21} &= \left( \langle 2 | A^\dagger | 1 \rangle - \alpha_{01} \langle 2 | B^\dagger | 1 \rangle \right) / \langle 2 | B^\dagger B^\dagger B | 1 \rangle = \sqrt{1 - 1/(2\Omega)} - 1. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Horné ohraničenie rozvoja (B.3) závisí od voľby veľkosti bozónového priestoru z bázy (B.1). Jeho maximálny rozmer (počet stavov) je  $2\Omega$ . Čím viac stavov z  $\mathbf{B}$  použijeme pri mapovaní, tým presnejší a zložitejší obraz  $A^\dagger$  získame. Ak vezmeme celý priestor  $\mathbf{B}$ , dostaneme exaktný obraz uvažovaného operátora  $A^\dagger$ . Napríklad pre jednovrstvový model s definovaným momentom hybnosti  $j = 1/2$  (t.j.  $2\Omega = 2$ ), je vypočítaná bozónová expanzia  $A^\dagger = B^\dagger + \alpha_{21} B^\dagger B^\dagger B$  presná.

# Dodatok C

## Modelové matice a elementy v schématických výpočtoch

### C.1 Maticové elementy pre QRPA s optimálnym základným stavom

Pre výpočet maticových elementov  $\langle RPA|(B^\dagger)^n B^m|RPA\rangle$  ( $m, n = 1, 2, \dots$ ), v ktorých stav  $|RPA\rangle$  je daný rovnicou (4.3), potrebujeme najskôr previesť faktorizáciu členov  $e^{t^*B-tB^\dagger} \equiv e^T$ ,  $e^{zB^\dagger B^\dagger - z^*BB} \equiv e^S$  vystupujúcich v QRPA vlnovej funkcii (4.3). Použitím Campbell-Baker-Hausdorff teóremu [Kir67] dostaneme:

$$\begin{aligned} e^{t^*B-tB^\dagger} &= e^{-tB^\dagger} e^{-tt^*/2} e^{t^*B}, \\ e^{zB^\dagger B^\dagger - z^*BB} &= e^{\alpha B^\dagger B^\dagger} e^{\beta(2+4B^\dagger B)} e^{\gamma BB}, \end{aligned} \quad (C.1)$$

kde

$$\alpha = \frac{e^{i\phi}}{2} \tanh(2\rho), \quad \beta = -\frac{1}{4} \ln(\cosh(2\rho)), \quad \gamma = -\frac{e^{-i\phi}}{2} \tanh(2\rho). \quad (C.2)$$

Následne pomocou faktorizácie (C.1) a vzorca

$$e^{\hat{a}} \hat{b} e^{-\hat{a}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \overbrace{[\hat{a}, [\hat{a}, \dots, [\hat{a}, \hat{b} \dots]]]}^{k\text{-krát}}, \quad (C.3)$$

skonštruujeme výraz pre transformáciu  $B^\dagger$ ,  $B$  operátorov:

$$\begin{aligned} e^{-T} e^{-S} B^\dagger e^T e^S &= uB^\dagger + e^{-i\phi} vB - t^*, \quad T = t^*B - tB^\dagger, \\ e^{-T} e^{-S} B e^T e^S &= uB + e^{i\phi} vB^\dagger - t, \quad S = zB^\dagger B^\dagger - z^*BB. \end{aligned} \quad (C.4)$$

Pripomeňme, že podobne ako v rovnicach (4.6), aj tu používame označenia  $u = \cosh(2\rho)$ ,  $v = \sinh(2\rho)$ . Aplikáciou rovníc (C.4) a použitím vzťahu

$$\langle |B^m(B^\dagger)^n| \rangle = n! \delta_{mn}, \quad (C.5)$$

ktorý vyplýva z podmienok  $[B, B^\dagger] = 1$  a  $B| \rangle = 0$ , môžeme nájsť explicitné vyjadrenia potrebných maticových elementov. Pre výpočty vzbudných stavov a  $\beta$ -prechodov v rámci QRPA s optimálnym základným stavom s použitím hamiltoniánu (4.1), sú potrebné nasledujúce maticové elementy (a k nim komplexne združené):

$$\begin{aligned}
\langle RPA|B|RPA\rangle &= -t, \\
\langle RPA|BB|RPA\rangle &= ue^{i\phi}v + t^2, \\
\langle RPA|B^+B|RPA\rangle &= v^2 + tt^*, \\
\langle RPA|BBB|RPA\rangle &= -3ue^{i\phi}vt - t^3, \\
\langle RPA|B^+BB|RPA\rangle &= -ue^{i\phi}vt^* - 2v^2t - t^2t^*, \\
\langle RPA|BBBB|RPA\rangle &= 3u^2e^{2i\phi}v^2 + 6ue^{i\phi}vt^2 + t^4, \\
\langle RPA|B^+BBB|RPA\rangle &= 3ue^{i\phi}v^3 + 3v^2t^2 + 3ue^{i\phi}vtt^* + t^*t^3, \\
\langle RPA|B^+B^+BB|RPA\rangle &= 2v^4 + u^2v^2 + u(e^{i\phi}vt^{*2} + e^{-i\phi}vt^2) + 4v^2tt^* + t^2t^{*2}.
\end{aligned} \tag{C.6}$$

## C.2 Nelineárne QRPA a TDA elementy

Presné vyjadrenia pre submatice (4.18) a (4.19) hamiltonovej a normovacej matice z QRPA rovníc (4.17) v kapitole 4.2.1 získame použitím SU(2) algebry (2.50) na výpočet dvojných komutátorov prítomných v uvedených maticiach a explicitného tvaru vlnovej funkcie základného stavu  $|rpa\rangle$  (4.15). Odvođené formuly pre hamiltonove submatice  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  sú:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{11} &= \langle rpa|[A, H, A^\dagger]|rpa\rangle \\
&= 2\epsilon + \lambda_1 + 2\lambda_1p - 2\lambda_1pF_{101} + \lambda_1p^2F_{020} - 2(\epsilon p + \lambda_1p + \lambda_1p^2)F_{010} - 4\lambda_2pF_{002}, \\
\mathcal{A}_{12} &= \mathcal{A}_{21} = \langle rpa|[A, H, AA^\dagger A^\dagger]|rpa\rangle \\
&= (4\epsilon + 4\epsilon p + 2\lambda_1 + 10\lambda_1p + 8\lambda_1p^2)F_{101} - (4\epsilon p + 4\lambda_1p + 10\lambda_1p^2)F_{111} + 2\lambda_1p^2F_{121} \\
&\quad - 2\lambda_1pF_{202} + \lambda_2[-2(1+p)F_{002} + 2(2p+p^2)F_{012} - 2p^2F_{022} - 4pF_{103}], \\
\mathcal{A}_{22} &= \langle rpa|[AAA^\dagger, H, AA^\dagger A^\dagger]|rpa\rangle \\
&= -(4\epsilon + 4\epsilon p + 2\lambda_1 + 10\lambda_1p + 8\lambda_1p^2)F_{101} - (6\epsilon p + 6\lambda_1p + 28\lambda_1p^2)F_{212} \\
&\quad + (6\epsilon + 16\epsilon p + 3\lambda_1 + 28\lambda_1p + 48\lambda_1p^2)F_{202} - (4\epsilon p^2 + 6\lambda_1p^2 + 10\lambda_1p^3)F_{121} \\
&\quad + (8\epsilon p + 4\epsilon p^2 + 6\lambda_1p + 20\lambda_1p^2 + 8\lambda_1p^3)F_{111} + \lambda_2[(14 + 50p + 60p^2 + 24p^3)F_{002} \\
&\quad - (42p + 100p^2 + 60p^3)F_{012} + (42p^2 + 50p^3)F_{022} - (12 + 48p + 64p^2)F_{103} \\
&\quad + 24(p + 2p^2)F_{113} - 12p^2F_{123} - 14p^3F_{032} - 4pF_{204}] \\
&\quad - 2\lambda_1pF_{303} + 3\lambda_1p^2F_{222} + 2\lambda_1p^3F_{131},
\end{aligned} \tag{C.7}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{11} &= -\langle rpa|[A, H, A]|rpa\rangle \\
&= -2\lambda_1pF_{002} + \lambda_2[2(1+p) - (4p + 2p^2)F_{010} + 2p^2F_{020} - 4pF_{101}], \\
\mathcal{B}_{12} &= \mathcal{B}_{21} = -\langle rpa|[A, H, AAA^\dagger]|rpa\rangle \\
&= \lambda_1(pF_{002} - 2pF_{103} - p^2F_{012}) + \lambda_2[-(1+p) + (3p + 2p^2)F_{010} \\
&\quad - (3p^2 + p^3)F_{020} + (6 + 24p + 20p^2)F_{101} - (12p + 24p^2)F_{111} + p^3F_{030} + 2pF_{004} \\
&\quad - 6pF_{202} + 6p^2F_{121}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{22} &= -\langle rpa|[AAA^\dagger, H, AAA^\dagger]|rpa\rangle \\
&= \lambda_1(4p + 4p^2)F_{103} - 4\lambda_1 p^2 F_{113} - 2\lambda_1 p F_{204} + \lambda_2 [-(12 + 48p + 60p^2 + 24p^3)F_{101} \\
&\quad + 4pF_{105} + (96p^2 + 36p + 60p^3)F_{111} - 8pF_{303} + 6p^2 F_{024} - (36p^2 + 48p^3)F_{121} \\
&\quad - (24p + 96p^2)F_{212} + (12 + 96p + 156p^2)F_{202} + 12p^2 F_{222} + 12p^3 F_{131} \\
&\quad - (12p + 18p^2)F_{014} + (6 + 18p + 12p^2)F_{004}], \tag{C.8}
\end{aligned}$$

a pre submatice  $\mathcal{U}$  a  $\mathcal{V}$  z QRPA normy  $\mathbf{N}$  na ľavej strane rovnice (4.17) máme:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{11} &= \langle rpa|[A, A^\dagger]|rpa\rangle = 1 - p F_{010}, \\
\mathcal{U}_{22} &= \langle rpa|[AAA^\dagger, AA^\dagger A^\dagger]|rpa\rangle \\
&= -(2p + 2)F_{101} + (4p + 2p^2)F_{111} + (3 + 8p)F_{202} - 2p^2 F_{121} - 3pF_{212}, \\
\mathcal{U}_{12} &= \mathcal{U}_{21} = \langle rpa|[A, AA^\dagger A^\dagger]|rpa\rangle = (2 + 2p)F_{101} - 2pF_{111}, \\
\mathcal{V}_{12} &= -\mathcal{V}_{21} = -\langle rpa|[A, AAA^\dagger]|rpa\rangle = -F_{002} + pF_{012}, \quad \mathcal{V}_{11} = \mathcal{V}_{22} = 0. \tag{C.9}
\end{aligned}$$

Kvôli jednoduchosti používame vo všetkých vzorcoch uvedených v tomto dodatku nasledovnú konvenciu:

$$F_{ijk} \equiv \langle rpa|A^i C^j (A^\dagger)^k |rpa\rangle, \quad p \equiv \frac{1}{2\Omega}. \tag{C.10}$$

V metóde TDA l.o. (kapitola 4.2.2) počítame modelové matice  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{U}$  so štruktúrou TDA fonónového operátora (4.34), ktorý obsahuje lineárny QRPA fonónový operátor  $Q^{\dagger(1)} = XA^\dagger - YA$ . Základný stav  $|rpa\rangle$  je spolu s amplitúdami  $X$ ,  $Y$  určený v EPP-QRPA l.o. metóde a má vyjadrenie (2.62). TDA matice  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{U}$  sú dané nasledovnými vzorcami:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \langle rpa|[A Q^{(1)}, H, Q^{\dagger(1)} A^\dagger]|rpa\rangle = \\
&\quad \left( (-16\lambda_1 X^2 - 8\lambda_2 YX) p^3 + (-12\lambda_1 X^2 - 12\lambda_2 YX - 8\epsilon X^2) p^2 \right) F_{020} \\
&\quad + \left( (16\lambda_2 YX + 8\epsilon X^2 + 32\lambda_1 X^2) p^2 + (4\lambda_2 YX + 12\lambda_1 X^2) p^3 \right. \\
&\quad \left. + (16\epsilon X^2 + 12\lambda_2 YX + 12\lambda_1 X^2) p \right) F_{010} \\
&\quad + \left( (-56\lambda_1 X^2 - 40\lambda_2 YX) p^2 + (-16\lambda_1 X^2 - 16\epsilon X^2 - 16\lambda_2 YX) p \right) F_{111} \\
&\quad + \left( (-56X^2\lambda_2 + 16\lambda_2 Y^2 + 16Y\lambda_1 X) p^2 \right. \\
&\quad \left. + (16\lambda_2 Y^2 + 8\epsilon YX - 16X^2\lambda_2 + 8Y\lambda_1 X) p \right) F_{012} \\
&\quad + \left( (48\lambda_2 YX + 80\lambda_1 X^2) p^2 + 8\lambda_2 YX + 8\lambda_1 X^2 + 16\epsilon X^2 \right. \\
&\quad \left. + (32\epsilon X^2 + 40\lambda_2 YX + 56\lambda_1 X^2) p \right) F_{101} \\
&\quad + \left( (-8\lambda_2 Y^2 - 12Y\lambda_1 X + 72X^2\lambda_2) p^2 - 8\epsilon YX - 8\lambda_2 Y^2 + 8X^2\lambda_2 - 4Y\lambda_1 X \right. \\
&\quad \left. + (-16\lambda_2 Y^2 - 8\epsilon YX + 56X^2\lambda_2 - 16Y\lambda_1 X) p \right) F_{002} \\
&\quad + (4\lambda_1 X^2 + 4\lambda_2 YX) p^3 F_{030} - 4\lambda_1 X^2 - 8\epsilon X^2 \\
&\quad + \left( (8\lambda_1 X^2 + 8\lambda_2 YX) F_{121} + (-4Y\lambda_1 X + 8X^2\lambda_2 - 8\lambda_2 Y^2) F_{022} \right. \\
&\quad \left. - 4\lambda_2 YX - 12\lambda_1 X^2 \right) p^2 - 4\lambda_2 YX + \left( -8\epsilon X^2 - 16\lambda_1 X^2 - 8\lambda_2 YX \right. \\
&\quad \left. + (-8\lambda_2 YX - 8\lambda_1 X^2) F_{202} - 16X^2\lambda_2 F_{103} + 8YX\lambda_2 F_{004} \right) p, \tag{C.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} = & \langle rpa|[A Q^{(1)}, Q^{\dagger(1)} A^\dagger]|rpa\rangle = \\
& \left( (4p + 2p^2) F_{010} - 2p^2 F_{020} + (8p + 4) F_{101} - 2 - 4pF_{111} - 2p \right) X^2 + \left( 4pF_{012} \right. \\
& \left. + (-4 - 4p) F_{002} \right) YX .
\end{aligned} \tag{C.12}$$

Štruktúra TDA modelových matic pre metódu TDA n.l.o. používajúcu tvar (4.37) fonónového operátora  $\Gamma^\dagger$ , je uvedená v rovnici (4.38). Jednotlivé časti v nej vieme presne vypočítať použitím komutačných vzťahov (2.50) a definície (4.15) základného stavu  $|rpa\rangle$ . Pre zložky maticového elementu  $\mathcal{A}(k, l)$  máme:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{X_1 X_1} &= (8\epsilon p^2 + 12\lambda_1 p + 12\lambda_1 p^3 + 32\lambda_1 p^2 + 16\epsilon p) F_{010} - 8\lambda_1 p F_{202} \\
&+ (32\epsilon p + 16\epsilon + 8\lambda_1 + 80\lambda_1 p^2 + 56\lambda_1 p) F_{101} + 8\lambda_1 p^2 F_{121} - 4\lambda_1 \\
&+ (-16\lambda_1 p^3 - 8\epsilon p^2 - 12\lambda_1 p^2) F_{020} + (-56\lambda_2 p^2 - 16p\lambda_2) F_{012} \\
&- 12\lambda_1 p^2 - 8\epsilon p - 8\epsilon - 16p\lambda_2 F_{103} - 16\lambda_1 p + 4\lambda_1 p^3 F_{030} + 8\lambda_2 p^2 F_{022} \\
&+ (-56\lambda_1 p^2 - 16\lambda_1 p - 16\epsilon p) F_{111} + (8\lambda_2 + 72\lambda_2 p^2 + 56p\lambda_2) F_{002} , \\
\mathcal{A}_{Y_1 Y_1} &= (-8\lambda_2 p^2 - 16p\lambda_2 - 8\lambda_2) F_{002} + (16p\lambda_2 + 16\lambda_2 p^2) F_{012} - 8\lambda_2 p^2 F_{022} , \\
\mathcal{A}_{Y_1 Y_1} &= (-8\lambda_2 p^2 - 16p\lambda_2 - 8\lambda_2) F_{002} + (16p\lambda_2 + 16\lambda_2 p^2) F_{012} - 8\lambda_2 p^2 F_{022} , \\
\mathcal{A}_{X_3 X_3} &= \epsilon \left( (72p + 48p^2 + 24) F_{101} + (-72p - 144p^2 - 48p^3) F_{111} + (32 + 144p) F_{303} \right. \\
&+ (-72 - 360p - 432p^2) F_{202} + (72p^2 + 72p^3) F_{121} + (144p + 360p^2) F_{212} \\
&- 24p^3 F_{131} - 32pF_{313} - 72p^2 F_{222} \left. \right) \\
&+ \lambda_1 \left( (120p^3 + 12 + 96p + 204p^2) F_{101} - (288p^2 + 48p + 408p^3 + 120p^4) F_{111} \right. \\
&+ (-432p - 1512p^3 - 1476p^2 - 36) F_{202} + (288p^3 + 204p^4 + 72p^2) F_{121} \\
&+ (108p + 864p^2 + 1476p^3) F_{212} + (-108p^2 - 432p^3) F_{222} + 16p^2 F_{323} \\
&+ (16 + 224p + 648p^2) F_{303} + (-48p^3 - 96p^4) F_{131} + (-224p^2 - 32p) F_{313} \\
&- 8pF_{404} + 36p^3 F_{232} + 12p^4 F_{141} \left. \right) \\
&+ \lambda_2 \left( (-288p^4 - 336p - 816p^2 - 816p^3 - 48) F_{002} + (216p^3 + 72p^2) F_{123} \right. \\
&+ (1008p^2 + 192p + 1632p^3 + 816p^4) F_{012} + (-432p^2 - 840p^3 - 72p) F_{113} \\
&+ (840p^2 + 1152p^3 + 216p + 24) F_{103} + (-1008p^3 - 288p^2 - 816p^4) F_{022} \\
&+ (384p^2 + 120p) F_{204} + (192p^3 + 336p^4) F_{032} - 16pF_{305} - 24p^3 F_{133} \\
&- 48p^4 F_{042} - 120p^2 F_{214} \left. \right) , \\
\mathcal{A}_{Y_3 Y_3} &= \lambda_2 \left( (-8p^2 - 16p - 8) F_{002} + (16p^3 + 48p^2 + 32p) F_{012} + (32p^3 + 16p^4) F_{032} \right. \\
&+ (64 + 352p + 384p^3 + 640p^2) F_{103} - (48p^2 + 48p^3 + 8p^4) F_{022} \\
&- (640p^3 + 192p + 704p^2) F_{113} - (32 + 512p^2 + 256p) F_{204} - 8p^4 F_{042} \\
&+ (192p^2 + 352p^3) F_{123} + (256p^2 + 64p) F_{214} - 32p^2 F_{224} - 64p^3 F_{133} \left. \right) , \\
\mathcal{A}_{X_1 X_3} &= (-12\lambda_1 - 24\epsilon - 120\lambda_1 p^3 - 72\epsilon p - 204\lambda_1 p^2 - 48\epsilon p^2 - 96\lambda_1 p) F_{101} \\
&+ (192\lambda_1 p^2 + 48\epsilon p + 36\lambda_1 p + 204\lambda_1 p^3 + 72\epsilon p^2) F_{111} \\
&+ (252\lambda_1 p^2 + 72\epsilon p + 120\lambda_1 p + 12\lambda_1 + 24\epsilon) F_{202} \\
&+ (104p\lambda_2 + 216\lambda_2 p^2 + 8\lambda_2) F_{103} + (-96\lambda_1 p^3 - 24\epsilon p^2 - 36\lambda_1 p^2) F_{121} \\
&+ (-24\lambda_1 p - 120\lambda_1 p^2 - 24\epsilon p) F_{212} + (-104\lambda_2 p^2 - 16p\lambda_2) F_{113} \\
&+ 12\lambda_1 p^2 F_{222} - 16\lambda_2 p F_{204} + 12\lambda_1 p^3 F_{131} - 8\lambda_1 p F_{303} + 8\lambda_2 p^2 F_{123} , \\
\mathcal{A}_{Y_1 Y_3} &= (8\lambda_2 + 8\lambda_2 p^2 + 16p\lambda_2) F_{002} + (-8\lambda_2 p^3 - 32\lambda_2 p^2 - 24p\lambda_2) F_{012} \\
&+ (-80p\lambda_2 - 96\lambda_2 p^2 - 16\lambda_2) F_{103} + (24\lambda_2 p^2 + 16\lambda_2 p^3) F_{022} \\
&+ (80\lambda_2 p^2 + 32p\lambda_2) F_{113} - 16\lambda_2 p^2 F_{123} - 8\lambda_2 p^3 F_{032} , \\
\mathcal{A}_{X_1 Y_3} &= (-28\lambda_2 p^2 - 8p\lambda_2) F_{014} + (6\lambda_1 p + 16\lambda_1 p^2 + 6\lambda_1 p^3 + 4\epsilon p^2 + 8\epsilon p) F_{012} \\
&+ (28p\lambda_2 + 4\lambda_2 + 36\lambda_2 p^2) F_{004} + (4\lambda_2 p^3 + 8p\lambda_2 + 12\lambda_2 p^2) F_{010} \\
&+ (-4\epsilon p^2 - 6\lambda_1 p^2 - 8\lambda_1 p^3) F_{022} + (24p\lambda_2 + 92\lambda_2 p^2) F_{212} - 2\lambda_2 p^4 F_{040}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\lambda_1 p^3 F_{032} - 16\lambda_2 p^3 F_{131} + 8\lambda_2 p F_{303} + 4\lambda_2 p^2 F_{024} - 12\lambda_2 p^2 F_{222} \\
& - 8\lambda_2 p F_{105} + 4\lambda_1 p^2 F_{123} - 2\lambda_2 + (-8\lambda_1 p - 28\lambda_1 p^2 - 8\epsilon p) F_{113} - 2\lambda_2 p^2 \\
& + (-164\lambda_2 p^2 - 92p\lambda_2 - 12\lambda_2) F_{202} + (-2\lambda_2 p^4 - 12\lambda_2 p^3 - 12\lambda_2 p^2) F_{020} \\
& + (8\lambda_2 p^3 + 4\lambda_2 p^4) F_{030} + (-176\lambda_2 p^2 - 160\lambda_2 p^3 - 48p\lambda_2) F_{111} - 4p\lambda_2 \\
& + (-4\epsilon - 2\lambda_1 - 8\lambda_1 p - 6\lambda_1 p^2 - 4\epsilon p) F_{002} + (48\lambda_2 p^2 + 88\lambda_2 p^3) F_{121} \\
& + (16\lambda_2 + 96\lambda_2 p^3 + 88p\lambda_2 + 160\lambda_2 p^2) F_{101} \\
& + (4\lambda_1 + 16\epsilon p + 40\lambda_1 p^2 + 8\epsilon + 28\lambda_1 p) F_{103} , \\
\mathcal{A}_{X_3 Y_1} = & (66\lambda_2 p^2 + 6\lambda_2 + 36p\lambda_2 + 36\lambda_2 p^3) F_{101} + (-18p\lambda_2 - 72\lambda_2 p^2 - 66\lambda_2 p^3) F_{111} \\
& + (-90\lambda_2 p^2 - 48p\lambda_2 - 6\lambda_2) F_{202} + (18\lambda_2 p^2 + 36\lambda_2 p^3) F_{121} \\
& + (2\lambda_1 + 12\epsilon p + 16\lambda_1 p + 30\lambda_1 p^2 + 4\epsilon) F_{103} + (48\lambda_2 p^2 + 12p\lambda_2) F_{212} \\
& + (-4\epsilon p - 4\lambda_1 p - 16\lambda_1 p^2) F_{113} + (20\lambda_2 p^2 + 12p\lambda_2) F_{014} \\
& + (-20p\lambda_2 - 6\lambda_2 - 14\lambda_2 p^2) F_{004} - 6\lambda_2 p^3 F_{131} - 6\lambda_2 p^2 F_{222} + 4\lambda_2 p F_{303} \\
& + 2\lambda_1 p^2 F_{123} - 4\lambda_2 p F_{105} - 6\lambda_2 p^2 F_{024} , \\
\mathcal{A}_{X_1 Y_1} = & (-2\lambda_2 p^3 - 6p\lambda_2 - 8\lambda_2 p^2) F_{010} + (-20p\lambda_2 - 24\lambda_2 p^2 - 4\lambda_2) F_{101} \\
& + (6\lambda_2 p^2 + 4\lambda_2 p^3) F_{020} + (2\lambda_1 + 8\lambda_1 p + 6\lambda_1 p^2 + 4\epsilon p + 4\epsilon) F_{002} \\
& + (20\lambda_2 p^2 + 8p\lambda_2) F_{111} + (-8\lambda_1 p^2 - 4\epsilon p - 4\lambda_1 p) F_{012} - 4p\lambda_2 F_{004} + 2\lambda_2 \\
& + 2\lambda_2 p^2 + 4p\lambda_2 + 2\lambda_1 p^2 F_{022} - 2\lambda_2 p^3 F_{030} - 4\lambda_2 p^2 F_{121} + 4p\lambda_2 F_{202} , \\
\mathcal{A}_{X_3 Y_3} = & \epsilon((-24p^2 - 12 - 36p) F_{103} + (24p + 36p^2) F_{113} + (32p + 8) F_{204} - 8p F_{214} \\
& - 12p^2 F_{123}) \\
& + \lambda_1((-60p^3 - 48p - 102p^2 - 6) F_{103} + (18p + 102p^3 + 96p^2) F_{113} \\
& + (4 + 44p + 112p^2) F_{204} + (-48p^3 - 18p^2) F_{123} + (-8p - 44p^2) F_{214} \\
& + 6p^3 F_{133} + 4p^2 F_{224}) \\
& + \lambda_2((-108p - 18 - 72p^4 - 216p^3 - 234p^2) F_{101} + (-12p^2 - 24p - 8) F_{105} \\
& + (-126p - 1218p^3 - 792p^2) F_{212} + (-134p^3 - 42p - 152p^2) F_{014} \\
& + (468p^3 + 324p^2 + 72p + 216p^4) F_{111} + (76p^3 + 42p^2) F_{024} - 16p^2 F_{323} \\
& + (24p^2 + 16p) F_{115} + (184p^2 + 32p) F_{313} + (-234p^4 - 108p^2 - 324p^3) F_{121} \\
& + (396p^3 + 126p^2) F_{222} + (1224p^3 + 42 + 396p + 1218p^2) F_{202} + 8p F_{404} \\
& + (76p + 134p^2 + 14 + 72p^3) F_{004} + (108p^4 + 72p^3) F_{131} - 14p^3 F_{034} \\
& - 42p^3 F_{232} - 18p^4 F_{141} - 8p^2 F_{125} - 8p F_{206} + (-184p - 16 - 468p^2) F_{303} . \tag{C.13}
\end{aligned}$$

A pre časti matice  $\mathcal{U}(k, l)$  dostávame:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{X_1 X_1} &= (4p + 2p^2) F_{010} + (4 + 8p) F_{101} - 2p^2 F_{020} - 4p F_{111} - 2p - 2 , \\
\mathcal{U}_{Y_1 Y_1} &= 0, \quad \mathcal{U}_{Y_3 Y_3} = 0, \quad \mathcal{U}_{Y_1 Y_3} = 0, \\
\mathcal{U}_{X_3 X_3} &= (12p^2 + 18p + 6) F_{101} - (18p + 12p^3 + 36p^2) F_{111} + (18p^3 + 18p^2) F_{121} \\
&\quad - (18 + 90p + 108p^2) F_{202} + (36p + 90p^2) F_{212} + (36p + 8) F_{303} - 8p F_{313} \\
&\quad - 6p^3 F_{131} - 18p^2 F_{222} , \\
\mathcal{U}_{X_1 X_3} &= (-18p - 6 - 12p^2) F_{101} + (12p + 18p^2) F_{111} + (6 + 18p) F_{202} - 6p^2 F_{121} \\
&\quad - 6p F_{212} , \\
\mathcal{U}_{X_1 Y_3} &= (-2p - 2) F_{002} + (4p + 2p^2) F_{012} + (4 + 8p) F_{103} - 2p^2 F_{022} - 4p F_{113} , \\
\mathcal{U}_{X_3 Y_1} &= (2 + 6p) F_{103} - 2p F_{113} , \\
\mathcal{U}_{X_1 Y_1} &= (2 + 2p) F_{002} - 2p F_{012} , \\
\mathcal{U}_{X_3 Y_3} &= (-18p - 6 - 12p^2) F_{103} + (12p + 18p^2) F_{113} + (16p + 4) F_{204} \\
&\quad - 4p F_{214} - 6p^2 F_{123} . \tag{C.14}
\end{aligned}$$



### C.3 Matice plne renormalizovanej QRPA metódy

Modelové matice *Plne renormalizovanej QRPA metódy* (FR-QRPA) prezentovanej v časti 4.3.1 majú štruktúru (4.50), ktorú sme získali použitím presných komutačných vzťahov (4.43). Jednotlivé koeficienty matice  $\mathcal{A}$  majú vyjadrenia:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &= E_p + E_n + (2 - p) \lambda_1 + (-V_n \lambda_5 + 2 \lambda_3 - V_p \lambda_8) p, \\
\mathcal{A}_{N_n} &= (V_n \lambda_4 V_p + \lambda_1/2 + (-1/2 V_n^2 - 1/2 V_p^2 - 2) \lambda_3) p^2 \\
&\quad + (\lambda_7 V_p + 3 \lambda_8 V_p) p^2/2 - (2 \lambda_1 + V_n \lambda_6 - \lambda_7 V_p + \lambda_5 V_n - \lambda_8 V_p) p \\
&\quad + (V_p^2 + V_n^2 - 1) p E_p/2 + (-V_n^2 - V_p^2 - 1) p E_n/2, \\
\mathcal{A}_{N_p} &= (-V_n \lambda_4 V_p + \lambda_1/2 + (1/2 V_p^2 + 1/2 V_n^2) \lambda_3 + \lambda_5 V_n) p^2 \\
&\quad + (-\lambda_7 V_p - \lambda_8 V_p) p^2/2 - (2 \lambda_1 + \lambda_8 V_p - V_n \lambda_6 + \lambda_7 V_p - \lambda_5 V_n) p \\
&\quad + (-V_n^2 - V_p^2 - 1) p E_p/2 + (V_p^2 + V_n^2 - 1) p E_n/2, \\
\mathcal{A}_{N_p N_n} &= (\lambda_1 + (-V_p^2 - V_n^2) \lambda_3 + 2 V_n \lambda_4 V_p) p^2, \\
\mathcal{A}_{N_n N_n} &= (\lambda_1/2 + (V_p^2 + V_n^2) \lambda_3/2 - V_n \lambda_4 V_p + V_n \lambda_6/2 - \lambda_5 V_n/2) p^2 \\
&\quad - (\lambda_7 V_p + \lambda_8 V_p) p^2/2, \\
\mathcal{A}_{N_p N_p} &= (\lambda_1/2 + (V_p^2 + V_n^2) \lambda_3/2 - V_n \lambda_4 V_p + V_n \lambda_6/2 + \lambda_5 V_n/2) p^2 \\
&\quad - (\lambda_7 V_p - \lambda_8 V_p) p^2/2, \\
\mathcal{A}_{A_{pn}^\dagger A_{pn}} &= ((-2 - 4 V_n^2 - 4 V_p^2) \lambda_1 + \lambda_5 V_n + \lambda_7 V_p + V_n \lambda_6 + \lambda_8 V_p) p, \\
\mathcal{A}_{A_{pn} A_{pn}} &= ((-2 - 4 V_n^2 - 4 V_p^2) \lambda_2 + \lambda_5 V_p + V_n \lambda_8 + \lambda_7 V_n + \lambda_6 V_p) p, \\
\mathcal{A}_{B_{pn}^\dagger B_{pn}} &= ((-2 V_p^2 - 2 V_n^2 - 4) \lambda_3 + \lambda_7 V_p + \lambda_8 V_p + \lambda_5 V_n + V_n \lambda_6 + 4 V_n \lambda_4 V_p) p, \\
\mathcal{A}_{A_{pp}^\dagger A_{pp}} &= ((V_p^2 + V_n^2) \lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_5 V_n - V_n \lambda_6) p, \\
\mathcal{A}_{A_{nn}^\dagger A_{nn}} &= ((V_p^2 + V_n^2) \lambda_1 - \lambda_7 V_p - \lambda_8 V_p + \lambda_3) p, \\
\mathcal{A}_{A_{pp}^\dagger A_{nn}} &= (4 V_n \lambda_1 V_p - \lambda_6 V_p - V_n \lambda_8 - \lambda_5 V_p - \lambda_7 V_n + 2 \lambda_4) p, \\
\mathcal{A}_{A_{pp} A_{pp}} &= (\lambda_7 V_p - 2 V_n \lambda_2 V_p + \lambda_8 V_p) p, \\
\mathcal{A}_{A_{nn} A_{nn}} &= (V_n \lambda_6 + \lambda_5 V_n - 2 V_n \lambda_2 V_p) p, \\
\mathcal{A}_{A_{nn} A_{pp}} &= ((-2 V_p^2 - 2 V_n^2) \lambda_2 + \lambda_5 V_p + V_n \lambda_8 + \lambda_7 V_n + \lambda_6 V_p) p, \tag{C.15}
\end{aligned}$$

kde  $p \equiv 1/\Omega$  a  $V_p, V_n$  sú renormalizačné členy z FR-QRPA fonónového operátora (4.47) obsahujúce BCS amplitúdy  $u_\tau, v_\tau, \zeta$  ( $\tau = p, n$ ).  $\lambda_1, \dots, \lambda_7$  sú interakčné parametre modelového hamiltoniánu (4.40). Štruktúra matice  $\mathcal{B}$  obsahuje nasledovné koeficienty:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_0 &= (2 - p) \lambda_2 + (\lambda_8 V_n + V_p \lambda_5) p, \\
\mathcal{B}_{N_n} &= ((-V_p^2 - V_n^2) \lambda_4/2 + \lambda_2/2 + V_p \lambda_3 V_n - V_n \lambda_7/2 - 3/2 \lambda_8 V_n) p^2 \\
&\quad + (-V_n V_p E_p + V_p V_n E_n - 2 \lambda_2 - \lambda_6 V_p + V_n \lambda_7 - V_p \lambda_5 + \lambda_8 V_n) p, \\
\mathcal{B}_{N_p} &= ((V_p^2 + V_n^2) \lambda_4/2 + \lambda_2/2 - V_p \lambda_3 V_n + V_n \lambda_7/2 - V_p \lambda_5 + \lambda_8 V_n/2) p^2 \\
&\quad + (V_n V_p E_p - V_p V_n E_n - 2 \lambda_2 - \lambda_8 V_n + \lambda_6 V_p - V_n \lambda_7 + V_p \lambda_5) p, \\
\mathcal{B}_{N_p N_n} &= (\lambda_2 + 2 V_p \lambda_3 V_n + (-V_n^2 - V_p^2) \lambda_4) p^2, \\
\mathcal{B}_{N_n N_n} &= (\lambda_2/2 - V_p \lambda_3 V_n + (V_n^2 + V_p^2) \lambda_4/2 + \lambda_6 V_p/2 + V_p \lambda_5/2) p^2 \\
&\quad - (-V_n \lambda_7/2 + \lambda_8 V_n/2) p^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{N_p N_p} &= (\lambda_2/2 - V_p \lambda_3 V_n + (V_n^2 + V_p^2) \lambda_4/2 - \lambda_6 V_p/2 + V_p \lambda_5/2) p^2 \\
&\quad - (V_n \lambda_7/2 + \lambda_8 V_n/2) p^2, \\
\mathcal{B}_{A_{pn}^\dagger A_{pn}} &= (-V_n \lambda_7 - \lambda_8 V_n + 8 V_n \lambda_1 V_p - V_p \lambda_5 - \lambda_6 V_p - 2 \lambda_2) p, \\
\mathcal{B}_{A_{pn} A_{pn}} &= (-2 \lambda_1 - \lambda_5 V_n + 8 V_n \lambda_2 V_p - V_n \lambda_6 - \lambda_8 V_p - \lambda_7 V_p) p, \\
\mathcal{B}_{B_{pn}^\dagger B_{pn}} &= (4 V_p \lambda_3 V_n + (-2 V_n^2 - 2 V_p^2) \lambda_4 - V_n \lambda_7 - \lambda_8 V_n - V_p \lambda_5 - \lambda_6 V_p) p, \\
\mathcal{B}_{A_{pp}^\dagger A_{pp}} &= (\lambda_6 V_p - 2 V_n \lambda_1 V_p + V_p \lambda_5) p, \\
\mathcal{B}_{A_{nn}^\dagger A_{nn}} &= (-2 V_n \lambda_1 V_p + \lambda_8 V_n + V_n \lambda_7) p, \\
\mathcal{B}_{A_{pp}^\dagger A_{nn}} &= ((-2 V_n^2 - 2 V_p^2) \lambda_1 + \lambda_8 V_p + \lambda_7 V_p + \lambda_5 V_n + V_n \lambda_6) p, \\
\mathcal{B}_{A_{pp} A_{pp}} &= ((V_n^2 + V_p^2) \lambda_2 - \lambda_8 V_n - V_n \lambda_7 + \lambda_4) p, \\
\mathcal{B}_{A_{nn} A_{nn}} &= ((V_n^2 + V_p^2) \lambda_2 + \lambda_4 - V_p \lambda_5 - \lambda_6 V_p) p, \\
\mathcal{B}_{A_{nn} A_{pp}} &= (2 \lambda_3 - \lambda_7 V_p + 4 V_n \lambda_2 V_p - \lambda_8 V_p - V_n \lambda_6 - \lambda_5 V_n) p.
\end{aligned} \tag{C.16}$$

Limitný prípad uvedených vzťahov (C.15) a (C.16) pri  $V_p = 0$ ,  $V_n = 0$  vedie ku vzorcom pre elementy matíc PP2-QRPA metódy. Pre maticu  $\mathcal{A}$  tak dostávame:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &= E_p + E_n + (2 - p) \lambda_1 + 2 \lambda_3 p, \\
\mathcal{A}_{N_n} &= (\lambda_1/2 - 2 \lambda_3) p^2 - (E_p/2 + E_n/2 + 2 \lambda_1) p, \\
\mathcal{A}_{N_p} &= \lambda_1 p^2/2 - (E_p/2 + E_n/2 + 2 \lambda_1) p, \\
\mathcal{A}_{N_p N_n} &= \lambda_1 p^2, \quad \mathcal{A}_{N_n N_n} = \mathcal{A}_{N_p N_p} = \lambda_1 p^2/2, \quad \mathcal{A}_{A_{pn}^\dagger A_{pn}} = -2 \lambda_1 p, \\
\mathcal{A}_{A_{pn} A_{pn}} &= -2 \lambda_2 p, \quad \mathcal{A}_{B_{pn}^\dagger B_{pn}} = -4 \lambda_3 p, \quad \mathcal{A}_{A_{pp}^\dagger A_{pp}} = \mathcal{A}_{A_{nn}^\dagger A_{nn}} = \lambda_3 p, \\
\mathcal{A}_{A_{pp}^\dagger A_{nn}} &= \mathcal{A}_{A_{pp} A_{pp}} = \mathcal{A}_{A_{nn} A_{nn}} = \mathcal{A}_{A_{nn} A_{pp}} = 0,
\end{aligned} \tag{C.17}$$

a pre maticu  $\mathcal{B}$  máme:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_0 &= (2 - p) \lambda_2, \quad \mathcal{B}_{N_n} = \mathcal{B}_{N_p} = (-2 p + 1/2 p^2) \lambda_2, \quad \mathcal{B}_{N_p N_n} = \lambda_2 p^2, \\
\mathcal{B}_{N_n N_n} &= \mathcal{B}_{N_p N_p} = \lambda_2 p^2/2, \quad \mathcal{B}_{A_{pn}^\dagger A_{pn}} = -2 \lambda_2 p, \quad \mathcal{B}_{A_{pn} A_{pn}} = -2 \lambda_1 p, \quad \mathcal{B}_{A_{nn} A_{pp}} = 2 \lambda_3 p, \\
\mathcal{B}_{B_{pn}^\dagger B_{pn}} &= \mathcal{B}_{A_{pp}^\dagger A_{pp}} = \mathcal{B}_{A_{nn}^\dagger A_{nn}} = \mathcal{B}_{A_{pp}^\dagger A_{nn}} = \mathcal{B}_{A_{pp} A_{pp}} = \mathcal{B}_{A_{nn} A_{nn}} = 0.
\end{aligned} \tag{C.18}$$

## C.4 Elementy z integrálneho výpočtu $\beta^-$ a $\beta\beta^-$ prechodov

Nasledujúci vzorec vyjadruje časť celkovej  $\beta^-$  sily (4.73), ktorá súvisí s prechodom do vzbudeného stavu s excitačnou energiou  $E_{RPA}$ . Uvádzame príslušný koeficient  $S_1$  zo vzťahu (4.73):

$$\begin{aligned}
S_1 &= \left( 90 v_n^2 u_p^2 \alpha_{21}^2 \alpha_{02}^2 \alpha_{11}^4 + 4 v_n^2 u_p^2 E_{RPA}^6 - 540 u_n v_p \alpha_{21}^2 \alpha_{02}^3 v_n u_p \alpha_{11}^3 \right. \\
&\quad \left. + 540 v_n^2 u_p^2 \alpha_{21}^2 \alpha_{02}^4 \alpha_{11}^2 + 600 u_n^2 v_p^2 \alpha_{21}^2 \alpha_{02}^4 \alpha_{11}^2 - 8 v_n^2 u_p^2 \alpha_{11} E_{RPA}^5 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +15u_n^2v_p^2\alpha_{21}^2\alpha_{02}^2\alpha_{11}^4 + 420u_nv_p\alpha_{21}^2\alpha_{02}^3v_nu_p\alpha_{11}^2E_{RPA} - 120v_n^2u_p^2\alpha_{21}^2\alpha_{02}^2\alpha_{11}^3E_{RPA} \\
& +160u_nv_p\alpha_{02}^3v_nu_p\alpha_{21}E_{RPA}^3 + 8u_nv_p\alpha_{21}\alpha_{02}v_nu_p\alpha_{11}^2E_{RPA}^3 \\
& -240u_n^2v_p^2\alpha_{21}^2\alpha_{02}^4\alpha_{11}E_{RPA} - 36u_nv_p\alpha_{21}^2\alpha_{02}^3v_nu_pE_{RPA}^3 + 16u_nv_p\alpha_{02}v_nu_pE_{RPA}^5 \\
& +72v_n^2u_p^2\alpha_{21}^2\alpha_{02}^2\alpha_{11}E_{RPA}^3 + 8u_nv_p\alpha_{21}\alpha_{02}v_nu_pE_{RPA}^5 - u_n^2v_p^2\alpha_{21}^2\alpha_{02}^2E_{RPA}^4 \\
& -96v_n^2u_p^2\alpha_{21}\alpha_{02}^2\alpha_{11}E_{RPA}^3 + 4v_n^2u_p^2\alpha_{11}^2E_{RPA}^4 + 96v_n^2u_p^2\alpha_{21}\alpha_{02}^2\alpha_{11}^2E_{RPA}^2 \\
& -36v_n^2u_p^2\alpha_{21}^2\alpha_{02}^4E_{RPA}^2 + 2u_n^2v_p^2\alpha_{21}^2\alpha_{02}^2\alpha_{11}^2E_{RPA}^2 - 36v_n^2u_p^2\alpha_{21}^2\alpha_{02}^2\alpha_{11}^2E_{RPA}^2 \\
& +16u_n^2v_p^2\alpha_{02}^2E_{RPA}^4 - 16u_nv_p\alpha_{02}v_nu_p\alpha_{11}E_{RPA}^4 + 60u_nv_p\alpha_{21}^2\alpha_{02}^3v_nu_p\alpha_{11}E_{RPA}^2 \\
& -6v_n^2u_p^2\alpha_{21}^2\alpha_{02}^2E_{RPA}^4 - 16u_nv_p\alpha_{21}\alpha_{02}v_nu_p\alpha_{11}^3E_{RPA}^2 - 360v_n^2u_p^2\alpha_{21}^2\alpha_{02}^4\alpha_{11}E_{RPA} \\
& -1440v_nu_p\alpha_{21}^2\alpha_{02}^5u_nv_p\alpha_{11} + 256u_n^2v_p^2\alpha_{02}^4\alpha_{21}E_{RPA}^2 + 32u_n^2v_p^2\alpha_{02}^2\alpha_{21}\alpha_{11}^2E_{RPA}^2 \\
& -320u_nv_p\alpha_{02}^3v_nu_p\alpha_{21}\alpha_{11}E_{RPA}^2 + 480v_nu_p\alpha_{21}^2\alpha_{02}^5u_nv_pE_{RPA} \\
& -8u_n^2v_p^2\alpha_{21}^2\alpha_{02}^4E_{RPA}^2 + 960u_n^2v_p^2\alpha_{21}^2\alpha_{02}^6)/(16E_{RPA}^6). \tag{C.19}
\end{aligned}$$

Rovnaký koeficient  $S_1$  pre silu  $S_{\beta+}^{(II)}$  získame z (C.19) zámenou  $u_p \leftrightarrow u_n$ ,  $v_p \leftrightarrow v_n$ . Konštanty  $M_1$ ,  $M_2$  a  $M_3$  z vypočítaného  $2\nu\beta\beta$  maticového elementu  $M_F^{(II)}$  (vzorec (4.75)) majú nasledovné explicitné vyjadrenia:

$$\begin{aligned}
M_1 = & \left( 64\alpha_{21}\alpha_{02}^3u_pv_nv_pu_nE_{RPA}^2 - 1680u_p^2v_n^2\alpha_{21}^2\alpha_{02}^4\alpha_{11} - 96\alpha_{21}\alpha_{02}^2v_p^2u_n^2\alpha_{11}E_{RPA}^2 \right. \\
& - 35\alpha_{21}^2\alpha_{02}u_pv_nv_pu_nE_{RPA}^4 + 30\alpha_{21}^2\alpha_{02}u_pv_nv_pu_n\alpha_{11}^2E_{RPA}^2 - 120u_p^2v_n^2\alpha_{21}^2\alpha_{02}^3\alpha_{11} \\
& - 72\alpha_{21}^2\alpha_{02}^2u_p^2v_n^2\alpha_{11}E_{RPA}^2 - 48\alpha_{21}^3\alpha_{02}u_pv_nv_pu_nE_{RPA}^2 - 180\alpha_{21}^2\alpha_{02}^2v_p^2u_n^2\alpha_{11}E_{RPA}^2 \\
& - 16\alpha_{21}\alpha_{02}u_pv_nv_pu_nE_{RPA}^4 + 80\alpha_{21}\alpha_{02}u_pv_nv_pu_n\alpha_{11}^2E_{RPA}^2 - 300v_p^2u_n^2\alpha_{21}^2\alpha_{02}^3\alpha_{11} \\
& + 1600u_pv_nv_pu_n\alpha_{21}^2\alpha_{02}^3\alpha_{11}^2 - 960v_p^2u_n^2\alpha_{21}^2\alpha_{02}^4\alpha_{11} - 96\alpha_{21}\alpha_{02}^2u_p^2v_n^2\alpha_{11}E_{RPA}^2 \\
& \left. + 880u_pv_nv_pu_n\alpha_{21}^2\alpha_{02}^5 + 85u_pv_nv_pu_n\alpha_{21}^2\alpha_{02}\alpha_{11}^4 \right) / (16E_{RPA}^5), \tag{C.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_2 = & \left( 96u_p^2v_n^2\alpha_{21}^2\alpha_{02}^2\alpha_{11}^3 - 32\alpha_{21}\alpha_{02}^3u_pv_nv_pu_nE_{RPA}^2 - 28\alpha_{21}^2\alpha_{02}u_pv_nv_pu_nE_{RPA}^4 \right. \\
& - 8\alpha_{21}\alpha_{02}u_pv_nv_pu_nE_{RPA}^4 - 68u_pv_nv_pu_n\alpha_{21}^2\alpha_{02}\alpha_{11}^4 - 1280u_pv_nv_pu_n\alpha_{21}^2\alpha_{02}^3\alpha_{11}^2 \\
& - 40\alpha_{21}\alpha_{02}u_pv_nv_pu_n\alpha_{11}^2E_{RPA}^2 + 48\alpha_{21}\alpha_{02}^2u_p^2v_n^2\alpha_{11}E_{RPA}^2 - 704u_pv_nv_pu_n\alpha_{21}^2\alpha_{02}^5 \\
& + 240v_p^2u_n^2\alpha_{21}^2\alpha_{02}^3\alpha_{11}^3 + 1344u_p^2v_n^2\alpha_{21}^2\alpha_{02}^4\alpha_{11} + 48\alpha_{21}\alpha_{02}^2v_p^2u_n^2\alpha_{11}E_{RPA}^2 \\
& \left. + 768v_p^2u_n^2\alpha_{21}^2\alpha_{02}^4\alpha_{11} \right) / (16E_{RPA}^5), \tag{C.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_3 = & \left( 60\alpha_{21}^2\alpha_{02}^2v_p^2u_n^2\alpha_{11}E_{RPA}^2 - 10\alpha_{21}^2\alpha_{02}u_pv_nv_pu_n\alpha_{11}^2E_{RPA}^2 - 7\alpha_{21}^2\alpha_{02}u_pv_nv_pu_nE_{RPA}^4 \right. \\
& + 320u_pv_nv_pu_n\alpha_{21}^2\alpha_{02}^3\alpha_{11}^2 + 24\alpha_{21}^2\alpha_{02}^2u_p^2v_n^2\alpha_{11}E_{RPA}^2 + 16\alpha_{21}^2\alpha_{02}^3u_pv_nv_pu_nE_{RPA}^2 \\
& + 17u_pv_nv_pu_n\alpha_{21}^2\alpha_{02}\alpha_{11}^4 - 336u_p^2v_n^2\alpha_{21}^2\alpha_{02}^4\alpha_{11} - 24u_p^2v_n^2\alpha_{21}^2\alpha_{02}^3\alpha_{11} \\
& \left. - 60v_p^2u_n^2\alpha_{21}^2\alpha_{02}^3\alpha_{11}^3 - 192v_p^2u_n^2\alpha_{21}^2\alpha_{02}^4\alpha_{11} + 176u_pv_nv_pu_n\alpha_{21}^2\alpha_{02}^5 \right) / (16E_{RPA}^5). \tag{C.22}
\end{aligned}$$

Parametre  $\alpha_{11}$  a  $\alpha_{02}$  pochádzajú z hamiltoniánu  $H_B$  (rovnica (4.58)) a člen  $\alpha_{21}$  vzniká pri bozónovom mapovaní fermiónového  $\beta$ -prechodového operátora (2.64). Je definovaný vo vzťahu (4.11).

# Literatúra

- [Bil71] S. M. Bilenky. *Vvedenie v diagamnuju techniku Feynmana*. Moskva, Atomizdat, 1971.
- [BKZ99] A. Bobyk, W. A. Kamiński, and P. Zareba. New BCS and renormalized QRPA formalism with application to double beta decay. *Eur. Phys. J. A*, 5:385–390, 1999.
- [BKZ00] A. Bobyk, W. A. Kamiński, and P. Zareba. Study of the double beta decay of  $70 \leq A \leq 100$  nuclei within the RQRPA and the self-consistent BCS+RQRPA formalisms. *Nucl. Phys. A*, 669:221–238, 2000.
- [BP87] S. M. Bilenky and S. T. Petcov. Massive neutrinos and neutrino oscillations. *Rev. Mod. Phys.*, 59:671–754, 1987.
- [Bru55] K. A. Brueckner. Two-body forces and nuclear saturation. *Phys. Rev.*, 97:1353–1366, 1955.
- [CDDS94] F. Catara, N. Dinh Dang, and M. Sambataro. Ground-state correlations beyond RPA. *Nucl. Phys. A*, 579:1–12, 1994.
- [CFT87] O. Civitarese, A. Faessler, and T. Tomoda. Suppression of the two neutrino double beta decay. *Phys. Lett. B*, 194:11–14, 1987.
- [CHH97] O. Civitarese, P. O. Hess, and J. G. Hirsch. The collapse of the pn-QRPA as a signal of phase-instabilities. *Phys. Lett. B*, 412:1–6, 1997.
- [CHW89] C. Ching, T. Ho, and X. Wu. Operator expansion method and the double beta decay of  $^{48}\text{Ca}$ . *Phys. Rev. C*, 40:304–313, 1989.
- [CNPR96] E. Caurier, F. Nowacky, A. Poves, and J. Retamosa. Shell Model Studies of the Double Beta Decays of  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{82}\text{Se}$  and  $^{136}\text{Xe}$ . *Phys. Rev. Lett.*, 77:1954–1957, 1996.
- [CS94a] O. Civitarese and J. Suhonen. Schematic study of perturbative effects on the two-neutrino double beta decay to excited states. *J. Phys. G*, 20:1441–1446, 1994.
- [CS94b] O. Civitarese and J. Suhonen. Two-neutrino double beta decay to excited one- and two-phonon states. *Nucl. Phys. A*, 575:251–268, 1994.

- [CSF95] O. Civitarese, J. Suhonen, and A. Faessler. Suppression of matrix elements of the  $2\nu\beta\beta$  decay by the competition between spin-flip- and non-spin-flip- like excitations. *Nucl. Phys. A*, 591:195–208, 1995.
- [D<sup>+</sup>00] D. S. Delion et al. Proton–neutron self–consistent quasiparticle random phase approximation within the O(5) model. *Phys. Rev. C*, 62:044311–1–044311–15, 2000.
- [DDS97] D. S. Delion, J. Dukelsky, and P. Schuck. Restoration of the Ikeda sum rule in self-consistent quasiparticle random-phase approximation. *Phys. Rev. C*, 55:2340–2344, 1997.
- [DKT85] M. Doi, T. Kotani, and E. Takasugi. Double beta decay and Majorana neutrino. *Prog. Theor. Phys. (Supp.)*, 83:1–175, 1985.
- [DP98] J. Dobeš and S. Pittel. Boson mappings and four-particle correlations in algebraic neutron-proton pairing models. *Phys. Rev. C*, 57:688–703, 1998.
- [DS03] D. S. Delion and J. Suhonen. Microscopic description of low-lying two-phonon states: Electromagnetic transitions. *Phys. Rev. C*, 67:034301–1–034301–11, 2003.
- [E<sup>+</sup>97] J. Engel et al. Neutron-proton correlations in exactly solvable model. *Phys. Rev. C*, 55:1781–1788, 1997.
- [EHV92] J. Engel, W. C. Haxton, and P. Vogel. Effective summation over intermediate states in double-beta decay. *Phys. Rev. C*, 46:2153–2157, 1992.
- [EVZ88] J. Engel, P. Vogel, and M. R. Zirnbauer. Nuclear structure effects in double-beta decay. *Phys. Rev. C*, 37:731–746, 1988.
- [FŠ98] A. Faessler and F Šimkovic. Double beta decay. *J. Phys. G*, 24:2139–2178, 1998.
- [Fur39] W. H. Furry. On transition probabilities in double beta-disintegration. *Phys. Rev.*, 56:1184–1193, 1939.
- [G<sup>+</sup>97] M. Günter et al. Heidelberg-Moscow beta beta experiment with <sup>76</sup>Ge: Full setup with five detectors. *Phys. Rev. D*, 55:54–67, 1997.
- [GM35] M. Goeppert-Mayer. Double beta-disintegration. *Phys. Rev.*, 48:512–516, 1935.
- [Goo79] A. L. Goodman. Hartree-Fock-Bogoliubov theory with applications to nuclei. *Adv. Nucl. Phys.*, 11:263–366, 1979.

- [GV92] A. Griffiths and P. Vogel. Double-beta decay to excited  $0^+$  states: Decay of  $^{100}\text{Mo}$ . *Phys. Rev. C*, 46:181–187, 1992.
- [H<sup>+</sup>96] H. Homma et al. Systematic study of nuclear  $\beta$  decay. *Phys. Rev. C*, 54:2972–2985, 1996.
- [HHC96] J.G. Hirsch, P. O. Hess, and O. Civitarese. Renormalized quasiparticle random phase approximation and double beta decay: A critical analysis of double fermi transition. *Phys. Rev. C*, 54:1976–1981, 1996.
- [HHC97] J.G. Hirsch, P. O. Hess, and O. Civitarese. Single- and double-beta decay Fermi transitions in an exactly solvable model. *Phys. Rev. C*, 56:199–211, 1997.
- [HS84] W. C. Haxton and G. J. Jr. Stephenson. Review of double beta decay. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 12:409–1266, 1984.
- [IUY65] K. Ikeda, T. Udagawa, and H. Yamamura. On the effect of Pauli Principle on collective vibrations in nuclei. *Prog. Theor. Phys.*, 33:22–37, 1965.
- [K<sup>+</sup>97] F. Krmpotić et al. Ikeda sum rule, self-consistency and double-beta decay in the renormalized quasiparticle random phase approximation. *Nucl. Phys. A*, 612:223–238, 1997.
- [K<sup>+</sup>98] F. Krmpotić et al. Self-consistent random phase approximation within the  $O(5)$  model and Fermi transitions. *Nucl. Phys. A*, 637:295–324, 1998.
- [Kir67] D. A. Kirzhnits. *Field theoretical methods in many-body systems*. Pergamon Press, 1967.
- [KK98] H. V. Klapdor-Kleingrothaus. Double-beta decay: Physics beyond the standard model now and in the future (GENIUS). *Phys. Atom. Nucl.*, 61:875–885, 1998.
- [KK<sup>+</sup>01] H. V. Klapdor-Kleingrothaus et al. Latest results from HEIDELBERG-MOSCOW double beta decay experiment. *Eur. Phys. J. A*, 12:147–154, 2001.
- [KK<sup>+</sup>02] H. V. Klapdor-Kleingrothaus et al. Evidence for neutrinoless double beta decay. *Mod. Phys. Lett. A*, 16:2409–2420, 2002.
- [KK03] H. V. Klapdor-Kleingrothaus. First evidence for neutrinoless double beta decay. hep-ph/0302234, 2003.
- [KS84] V.A. Kuzmin and V. G. Soloviev. Fragmentation of the Gamow-Teller resonance in spherical nuclei. *J. Phys. G*, 10:1507–1522, 1984.

- [KS88] V.A. Kuzmin and V. G. Soloviev. Gamow-Teller  $\beta^+$  decays and strengths functions of (n,p) transitions in spherical nuclei. *Nucl. Phys. A*, 486:118–132, 1988.
- [L<sup>+</sup>95] K. Langanke et al. Shell model Monte Carlo studies of  $fp$ -shell nuclei. *Phys. Rev. C*, 52:718–725, 1995.
- [LMG65] H. J. Lipkin, N. Meshkov, and A. J. Glick. Validity of many-body approximation methods for a solvable model. *Nucl. Phys. A*, 62:188–198, 1965.
- [MLH92] K. J. Moody, R. W. Lougheed, and E. K. Hulet. Search for the double beta decay of  $^{244}\text{Pu}$ . *Phys. Rev. C*, 46:2624–2627, 1992.
- [MN92] P. Moeller and J. R. Nix. Nuclear pairing models. *Nucl. Phys. A*, 536:20–60, 1992.
- [P<sup>+</sup>95] A. Poves et al. Double beta decay of  $^{48}\text{Ca}$  revisited. *Phys. Lett. B*, 361:1–4, 1995.
- [PR59] H. Primakov and S. P. Rosen. Double beta decay. *Rep. Prog. Phys.*, 22:121–166, 1959.
- [R<sup>+</sup>96] P. B. Radha et al. Shell Model Monte Carlo Method for Two-Neutrino Double Beta Decay. *Phys. Rev. Lett.*, 76:2642–2645, 1996.
- [R<sup>+</sup>00] A.A. Raduta et al. Semi-classical description of a system with proton-neutron interaction. *Nucl. Phys. A*, 671:255–291, 2000.
- [RF02] V. Rodin and A. Faessler. Fully renormalized quasiparticle random-phase approximation fulfills Ikeda sum rule exactly. *Phys. Rev. C*, 66:051303–1–051303–4, 2002.
- [Row68] D. J. Rowe. Methods for Calculating Ground-State Correlations of Vibrational Nuclei. *Phys. Rev.*, 175:1283–1293, 1968.
- [Row70] D. J. Rowe. *Nuclear collective motion*. Methuen-London, 1970.
- [RS80] P. Ring and P. Schuck. *The nuclear many-body problem*. Springer-Verlag, 1980.
- [RS96] A.A. Raduta and J. Suhonen. Description of  $\beta$  decay to excited quadrupole phonon states within a boson-expansion formalism. *Phys. Rev. C*, 53:176–187, 1996.
- [Š<sup>+</sup>00] F. Šimkovic et al. Quasiparticle Random Phase Approximation with inclusion of the Pauli Exclusion Principle. *Phys. Rev. C*, 61:044319–1–044319–11, 2000.

- [Š<sup>+</sup>01] F. Šimkovic et al. Neutrinoless double beta decay of  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{82}\text{Se}$ ,  $^{100}\text{Mo}$  and  $^{136}\text{Xe}$  to excited  $0^+$  states. *Phys. Rev. C*, 64:035501–1–035501–12, 2001.
- [Sam99] M. Sambataro.  $\beta^-$  and double- $\beta^-$ -decay transitions in a schematic model. *Phys. Rev. C*, 59:2056–2064, 1999.
- [San65] E. A. Sanderson. Nuclear ground states in the Random Phase Approximation. *Phys. Lett.*, 19:141–143, 1965.
- [Sar99] X. Sarazin. Double- $\beta$  decays with the NEMO experiment: final results of NEMO-2 with various nuclei and status of NEMO-3. *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)*, 70:239–241, 1999. NEMO Collaboration.
- [SC94] J. Suhonen and O. Civitarese. Quasiparticle random phase approximation analysis of the double beta decay of  $^{100}\text{Mo}$  to the ground state and excited states of  $^{100}\text{Ru}$ . *Phys. Rev. C*, 49:3055–3060, 1994.
- [SC98] J. Suhonen and O. Civitarese. Weak-interaction and nuclear-structure aspects of nuclear double beta decay. *Phys. Rep.*, 300:123–214, 1998.
- [ŠP99] F. Šimkovic and G. Pantis. A field theory approach to two-neutrino double beta decay. *Yad. Fiz.*, 62:1–7, 1999.
- [ŠPF98a] F. Šimkovic, G. Pantis, and A. Faessler. Two-neutrino double beta decay: A study of different approximation schemes. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 40:285–294, 1998.
- [ŠPF98b] F. Šimkovic, G. Pantis, and A. Faessler. Two-neutrino double beta decay: Critical analysis. *Phys. Atom. Nucl.*, 61:1218–1228, 1998.
- [SS97] M. Sambataro and J. Suhonen. Quasiparticle random-phase approximation and  $\beta$ -decay physics: Higher-order approximation in boson formalism. *Phys. Rev. C*, 56:782–790, 1997.
- [SS98] M. Sambataro and J. Suhonen. On the interdependence between ground and one-phonon RPA states. *Europhys. Lett.*, 44:173–179, 1998.
- [ŠŠF96] J. Schwieger, F. Šimkovic, and A. Faessler. The Pauli principle, QRPA and the two-neutrino double beta decay. *Nucl. Phys. A*, 600:4179–192, 1996.
- [ŠV98] F. Šimkovic and M. Veselský. Double beta decay: Operator expansion method revisited. *Czech. J. Phys.*, 48:245–248, 1998.
- [T<sup>+</sup>79] Y. Tanaka et al. Effect of the spin-orbit potential on the single particle levels in the superheavy region. *Phys. Lett. B*, 83:279–284, 1979.



- [T<sup>+</sup>95] G. Teneva et al. Two-vacua RPA and the two-neutrino double-beta decay. *Nucl. Phys. A*, 586:249–264, 1995.
- [TS95] J. Toivanen and J. Suhonen. Renormalized proton-neutron quasiparticle random-phase approximation and its application to double-beta decay. *Phys. Rev. Lett.*, 75:410–413, 1995.
- [TS97] J. Toivanen and J. Suhonen. Study of several double-beta-decaying nuclei using the renormalized proton-neutron quasiparticle random-phase approximation. *Phys. Rev. C*, 55:2314–2323, 1997.
- [TZ02] V. I. Tretyak and Y. G. Zdesenko. Tables of double beta decay data-an update. *Atom. Data and Nucl. Data Tables*, 80:83–116, 2002.
- [VZ86] P. Vogel and M. R. Zirnbauer. Suppression of the two-neutrino double-beta decay by nuclear-structure effects. *Phys. Rev. Lett.*, 57:3148–3151, 1986.
- [ZBR90] L. Zhao, B. A. Brown, and W. A. Richter. Shell-model calculation for two-neutrino double beta decay of <sup>48</sup>Ca. *Phys. Rev. C*, 42:1120–1125, 1990.

# Zoznam publikácií

1. F. Šimkovic, M. Šmotlák and A.A. Raduta, Quasiparticle random-phase approximation with an optimal ground state, *J. Phys. G*, 27:1757-1766,2001
2. M. Šmotlák, F. Šimkovic and A.A. Raduta, Looking for an optimal ground state within quasiparticle random phase approximation, *Czech. J. Phys.*, 52:521-529, 2002
3. G. Pantis, M. Šmotlák and F. Šimkovic, A schematic calculation of the  $\beta\beta$ -decay matrix element within the Green function approach, *Czech. J. Phys.*, 52:629-636, 2002
4. F. Šimkovic, M. Šmotlák and G. Pantis, Quasiparticle random phase approximation with a nonlinear phonon operator, *Phys. Rev. C*, 68:014309-1-014309-4, 2003
5. M. Šmotlák, QRPA approaches for double beta decay, to be published in *Czech. J. Phys.*

# Summary

Within the presented thesis the following major results were obtained:

- A new ansatz for the correlated ground state of the many-nucleon system was proposed which results in obtaining a modified Quasiparticle Random Phase Approximation (QRPA). An additional degree of freedom was introduced which allows to determine variationally the ground state, simultaneously with solving the QRPA equations. This new approach, *QRPA with an optimal ground state* (QRPA-OGS), was studied within the proton–neutron Lipkin model [HHC96]. New solutions were found in the range of the particle–particle (p–p) interaction strength, where the standard QRPA formalism does not work. The new collective modes are determined by the higher order boson expansion terms in the model Hamiltonian as well as by the additional degree of freedom involved in the QRPA ansatz. It was stressed that the new modes appear due to a spontaneous breaking of a certain symmetry, i.e. the minimum energy is no longer reached in the origin of the coordinates frame. It was found that one of the new modes behaves like the EPP-QRPA [ $\check{S}^+00$ ] solution, while another one is in good agreement with the solution of the semiclassical approach [R<sup>+</sup>00]. A detailed study of the averaged number of quasiparticles in the ground state indicates that QRPA-OGS approach provides an improved description of the QRPA ground state. On the other hand from the predicted  $\beta$  and  $\beta\beta$  transition amplitudes we concluded that for large values of the p–p interaction strength anharmonics effects play an important role.
- A model calculation of the Quasiparticle Random Phase Approximation with a new form of the phonon operator including nonlinear terms was presented. This modification of the QRPA, which to our knowledge is used for the first time, was applied to the proton–neutron Lipkin model. We showed that the inclusion of nonlinear terms in the phonon operator of the QRPA is feasible and leads to a very good agreement with the exact results obtained by the diagonalization of the nuclear Hamiltonian. By adding more nonlinear terms. the accuracy can be further increased. In the case all relevant nonlinear terms in the phonon operator are considered, the odd excited states of the nuclear Hamiltonian are reproduced exactly. Further, we found that the even excited states of the considered Hamiltonian are reproduced exactly with help of a TDA-like equations. A general prescription for construction of excited states of multiphonon character within the QRPA was proposed. In connection with an improved description of one– and two–phonon states in the QRPA we suggested an original way of the calculation of double beta decay nuclear matrix element, which allows to avoid so called

two-vacua problem. We addressed also a possibility of QRPA calculation with the non-linear terms of the phonon operator in the case of more realistic nuclear models or even in realistic calculations. It is expected that they are feasible due to a tremendous development in possibilities of doing such numerical computations, which allows diagonalization of extremely large matrices in comparison with those ruling the standard QRPA approach.

- A possibility of restoration of the Ikeda sum rule (ISR) [IUY65] within different modifications of the QRPA approach was studied. The importance of the so called scattering terms of the nuclear Hamiltonian was analyzed. It was manifested that they play a minor role in the ISR restoration. But we showed that a self-consistent modification of BCS amplitudes imposed by the requirement for the particle number conservation at the level of the QRPA ground state, is of major importance for restoration of the ISR. An interesting way to realize it was proposed within the recently published *Fully renormalized QRPA* (FR-QRPA) [RF02], which fulfills ISR exactly. In the presented thesis the first numerical application of this many-body approach was carried out. It was achieved with help of two different ansatz for the QRPA ground state, by taking into account the advantage of the schematic SO(5) model. The quantities of physical interest were evaluated (single and double beta decay transitions) and the limitations of the FR-QRPA approach were addressed. From a comparison of FR-QRPA with self-consistent RQRPA results we concluded that the effect of Ikeda sum rule conservation is important in the range of large value of particle-particle strength beyond the point of the collapse of the standard QRPA. We also pointed out that the FR-QRPA approach is sensitive to the precise evaluation of the expectation values in the RPA matrices.
- The time integral representations of the many-body Green functions describing the beta-decay strength and the two-neutrino double beta decay ( $2\nu\beta\beta$ -decay) matrix element were used in schematic calculations within the proton-neutron Lipkin model. The two body Hamiltonian considered includes a quadratic polynomial in bosons to describe the motion of the selected degrees of freedom. The beta transition operators also include higher order terms in the boson expansion. They have been shown to be of crucial importance in the determination of the  $2\nu\beta\beta$ -decay matrix element  $M_F$ . We have found that by using the approximation scheme associated with the standard QRPA approach, we get an unphysical contribution to  $M_F$  due to the non-orthogonality of the initial and final BCS ground states. The physical contribution to  $M_F$  derived within the time integral representation, was found to be strongly suppressed in magnitude in comparison with the unphysical one. Our calculations, which avoid the construction of the intermediate nuclear states, shed more light on the problem of the reliability of the double beta decay matrix elements, calculated within the standard QRPA approach, in particular, also on the problem of the sensitivity of  $M_F$  to the particle-particle interaction strength.
- The first realistic calculations of the single and double beta decay Fermi transitions were presented within the so called QRPA approach with *perturbative*

*treatment of the Pauli exclusion principle* (PP-QRPA). In particular, the subject of study was the transition  $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$ . The advantage of the PP-QRPA approach is a better treatment of the Pauli exclusion principle by performing the calculation of RPA matrices in the fermionic space with help of a special ansatz for the RPA ground state. We found that the PP-QRPA results are significantly less sensitive to the details of the nuclear Hamiltonian in comparison with the RQRPA and standard-QRPA ones. We note that the last two approaches are commonly used in the realistic calculations of the single and double beta decay transitions. Thus, our calculation indicates a possible way of improving the reliability of calculated both two-neutrino and neutrinoless double beta decay matrix elements, what is a current requirement of physical community.