

Oddelenie teoretickej fyziky Fyzikálneho ústavu SAV

Mgr. Roman Pekarík

**Univerzálny prístup k popisu
elektromagnetickej štruktúry
silnointeragujúcich častíc**

Dizertačná práca

Na získanie vedecko-akademickej hodnosti philosophiae
doctor vo vednom odbore doktorandského štúdia

Jadrová a subjadrová fyzika
11-24-9

Školiteľ: RNDr. Stanislav Dubnička, DrSc.

Bratislava 2005

Obsah

1	Úvod	4
2	Elektromagnetické formfaktory silnointeragujúcich častíc	7
3	Súčasný stav teoretických predpovedí správania sa elektromagnetických formfaktorov hadrónov	12
4	Model dominantnosti vektorových mezónov	16
5	Analytické vlastnosti elektromagnetických formfaktorov hadrónov a ľahkých jadier	18
5.1	Vyšetrovanie analytických vlastností formfaktorov pomocou Feynmanových diagramov poruchovej teórie	19
6	Asymptotické podmienky pre elektromagnetické formfaktory hadrónov reprezentované VMD modelom	24
7	Všeobecné riešenie asymptotických podmienok	30
8	Elektromagnetické prechodové formfaktory hadrónov	40
8.1	Súčasný popis údajov prechodového formfaktoru $\phi\eta$ v priestorupodobnej aj časupodobnej oblasti v rámci unitárneho a analytického modelu	40
8.2	Prechodové formfaktory pseudoskalárnych mezónov	46
9	Podivné prechodové formfaktory mezónov	56
9.1	Podivný prechodový formfaktor $\phi\eta$	59
9.2	Podivné prechodové formfaktory pseudoskalárnych mezónov	60
10	Príspevky procesov elektrón-pozitrónovej anihilácie na $\phi\eta$ a pseudoskalárny (skalárny) mezón a fotón k $g - 2$ miónov	64

10.1	Proces $e^+e^- \rightarrow \phi\eta$	67
10.2	Procesy $e^+e^- \rightarrow P\gamma$	68
10.3	Procesy $e^+e^- \rightarrow S\gamma$	68
11	Záver	70

1 Úvod

Do polovice päťdesiatych rokov 20. storočia sa predpokladalo, že všetky tzv. elementárne častice sú bezštruktúrne, t.j. bodové. Táto vlastnosť je zabudovaná aj v základoch lokálnej kvantovej teórie poľa (zjednocujúcej konzistentne kvantovú teóriu, pojem poľa a relativistickú invariantnosť), ktorá sa považuje za dynamickú teóriu popisu vzájomných interakcií elementárnych častíc.

Až pokusy s pružným rozptylom elektrónov na protónoch v päťdesiatych rokoch minulého storočia prevádzané v SLAC-u pod vedením Hofstadtera [1] priviedli k objavu priestorovej štruktúry protónu. Hofstadter so spolupracovníkmi využil už vtedy dobudovanú kvantovú elektrodynamiku (QED), teda kvantovú teóriu poľa aplikovanú na elektromagnetické interakcie, a získané teoretické správanie účinného prierezu preveroval experimentálne. Našiel nesúhlas teoretickej formuly s nameranými hodnotami účinného prierezu, čo ho priviedlo k odhaleniu, že nie je možné viacej veriť predpokladu o bodovosti protónu zabudovaného do teórie. Tento poznatok o nebodovosti bol neskôr rozšírený na všetky silno interagujúce elementárne častice- hadróny. Ako dôsledok, pri výpočte maticového elementu nepoznáme explicitne (na rozdiel od elektrónu) elektromagnetický prúd hadrónu. Tento pri výpočtoch zapisujeme symbolicky a využívajúc rôzne symetrie, rozkladáme ho podľa maximálneho počtu lineárne nezávislých vektorových kovariantov, konštruovaných zo štvorhybností hadrónu vchádzajúceho do interakcie a vychádzajúceho z interakcie a jeho spinových parametrov. Koeficienty rozkladu sú skalárne funkcie jednej premennej a to štvorca hybnosti prenesenej virtuálnym fotónom $t = q^2 = -Q^2$ a nazývame ich elektromagnetické formfaktory hadrónu. Ich počet závisí od spinu uvažovaného hadrónu.

Očakáva sa, že správanie elektromagnetických formfaktorov v celom intervale od $-\infty$ do $+\infty$ bude predpovedané dynamickou teóriou silných interakcií, kvantovou chromodynamikou (QCD), kalibračno-invariantnou lokálnou kvantovou teóriou poľa popisujúcou vzájomné pôsobenie farebných kvarkov a gluónov. Táto ale dôveryhodne predpovedá iba asymptotické správanie elektromagnetických formfaktorov v priestoropodobnej oblasti ($t < 0$) zhodne (až na logaritmické korekcie) s predpoveďami pravidiel kvarkového počtu. Sumačné pravidlá QCD predpovedajú správanie elektromagnetických formfaktorov hadrónov v konečnej a ohraničenej priestoropodobnej oblasti. Chirálna perturbačná teória (χ PT), ekvivalentná QCD pri nízkych energiách, predpovedá správanie formfaktorov v okolí bodu $t = 0$. Ale v časupodobnej oblasti, kde formfaktory sú komplexnými funkciami svojho argumentu a experimenty s elektrón-pozitrónovou anihiláciou na hadrón-antihadrónový pár

preukazujú ich netriviálne rezonančné správanie, QCD v súčasnej dobe žiadne predpovede nedáva.

V takej situácii hrajú významnú úlohu rôzne fenomenologické prístupy a metódy.

Pri interpretácii existujúcich dát o elektromagnetických formfaktoroch sa ukázalo užitočným využitie analytických vlastností formfaktorov. Tieto sa obvykle využívali v podobe integrálnych (tzv. disperzných) vzťahov spolu s podmienkou unitarity, ktoré potom dávajú do súvisu skúmaný formfaktor s inými formfaktormi a amplitúdami rôznych silno interagujúcich častíc. Takýto prístup historicky zohral významnú úlohu v prípade nukleónov. Priviedol k predpovedaniu existencie izoskalárnych a izovektorových mezónov, ktoré mali potom za následok vytvorenie modelu vektorovej dominantnosti (VMD) [2], ako jedného z najpoužívanejších modelov pre popis elektromagnetických formfaktorov hadrónov. Model je založený na predpoklade, že vzájomné pôsobenie fotónu s hadrónom nastáva premenou fotónu na vektorový mezón s rovnakými kvantovými číslami a ten potom silno interaguje s daným hadrónom ako v ktorejkoľvek inej hadrónovej zrážke.

Aj keď VMD model bol vybudovaný pred kvarkovým modelom, je s ním zlučiteľný. Skutočne, pri energii fotónu približne rovnej hmotnosti nejakého vektorového mezónu sa tento mení na kvark-antikvarkový pár, ktorý následkom konfajnementových efektov nemôže existovať vo voľnom stave a okamžite po zrode sa mení na vektorový mezón s kvantovými číslami fotónu.

Hoci z pohľadu globálnej analýzy existujúcich dát o elektromagnetických formfaktoroch bol VMD model v minulosti najzaužívanejší, má rad nedostatkov. Nezahŕňa nestabilitu vektorových mezónov, podmienku unitarity a analytické vlastnosti formfaktorov, ktoré by mohli viesť k realističnejšiemu popisu správania formfaktorov v časupodobnej oblasti. Iným vážnym nedostatkom VMD modelu je rovnaké asymptotické správanie formfaktorov všetkých hadrónov, čo zjavne nesúhlasí s predpoveďou kvarkového modelu pre asymptotické správanie elektromagnetických formfaktorov baryónov a atómových jadier.

Východiskom z takej situácie je univerzálny unitárny a analytický model, ktorý konzistentne zjednocuje experimentálny fakt kreácie vektorovo-mezónových rezonancií v elektrón-pozitrónových anihilačných procesoch na hadróny, analytické vlastnosti elektromagnetických formfaktorov a asymptotické správanie predpovedané kvarkovým modelom hadrónov.

Predložená dizertačná práca sa zaoberá všetkými vyššie spomínanými aspektami týkajúcimi sa elektromagnetickej štruktúry hadrónov. Zavádza sa podrobnejšie pojem elektromagnetického formfaktora a odvodenie nezávislého počtu týchto formfaktorov sa demonštruje na prípade piónov, kaónov a nukleónov. Ďalej sa veľmi stručne zhrňujú súčasné poznatky o elektromag-

netických formfaktoroch hadrónov a ľahkých jadier.

V kapitole 4 sa stručne vysvetľuje model dominantnosti vektorových mezónov a v závere sa zdôrazňuje dôležitosť využitia analytických vlastností elektromagnetických formfaktorov hadrónov. Tieto sa diskutujú v kapitole 5, v ktorej špeciálna pozornosť je venovaná získaniu informácií o polohe singularít (bodov vetvenia) vyšetrovaním analytických vlastností Feynmanových diagramov formálneho rozvoja formfaktoru do radu podľa konštanty silných interakcií.

Kapitola 6 rieši problém, akým spôsobom je možné získať správne asymptotické správanie formfaktora v rámci VMD modelu. Vychádzajúc z rôznych predpokladov o elektromagnetických formfaktoroch, odvádzajú sa vo všeobecnom prípade dva typy zdanlivo odlišných asymptotických podmienok a dokazuje sa ich ekvivalentnosť.

V kapitole 7 sa stručne uvádza obecné riešenie asymptotických podmienok kombinovaných s normou elektromagnetického formfaktora, ktoré privádza k VMD reprezentácii formfaktorov (t.j. stále sa uvažujú vektorové mezóny ako stabilné častice) s ľubovoľným, ale konečným počtom vektorových mezónov, automaticky normovanej a s asymptotikou predpovedanou kvarkovým modelom hadrónov.

Konštrukcii unitárneho a analytického modelu rôznych elektromagnetických prechodových formfaktorov je venovaná 8. kapitola. Potom analogicky k nukleónovým podivným formfaktorom v kapitole 9 sa predpovedajú správanie sa podivných prechodových formfaktorov.

V poslednej, desiatej kapitole, využívajúc skonštruované v predchádzajúcich kapitolách elektromagnetické prechodové formfaktory, sa vyhodnocujú príspevky procesov elektrón-pozitrónovej anihilácie na pseudoskalárny (skalárny) mezón a fotón k anomálnemu magnetickému momentu miónu.

Výsledky, ktoré sú obsahom predkladanej dizertačnej práce, sú opublikované v 4-och prácach renomovaných zahraničných časopisov a boli prezentované na medzinárodných konferenciách doma i v zahraničí ako: Hadron Structure '02 v Herľanoch (SR), Photon '03 vo Frascati (Taliansko), NAPP '03 v Dubrovniku (Chorvátsko), SIGHAD '03 v Pise (Taliansko) a Hadron Structure '04 v Smoleniciach (SR). Dve práce sú zaslané do tlače.

2 Elektromagnetické formfaktory silnointeragujúcich častíc

Ako bolo povedané v úvode, elektromagnetické formfaktory sú skalárne funkcie, závisiace od kvadrátu hybnosti prenesenej virtuálnym fotónom, pomocou ktorých sa popisuje elektromagnetická (EM) štruktúra silnointeragujúcich častíc, prejavujúca sa napríklad pri vzájomnom pôsobení hadrónov a nabitých leptónov alebo pri vzniku párov hadrón-antihadrón v procese elektrón-pozitronovej anihilácie. Také procesy prebiehajú pod vplyvom elektromagnetickej interakcie a následkom toho maticový element pružného elektrón-hadrónového rozptylu $M(e^- H \rightarrow e^- H)$ v najnižšom ráde rozvoja podľa konštanty jemnej štruktúry je možné napísať v tvare

$$M(e^- H \rightarrow e^- H) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{e}{(Q)^2} \bar{u}(k_2) \gamma_\mu u(k_1) \langle p_2 | J_\mu(0) | p_1 \rangle, \quad (1)$$

kde $e\bar{u}(k_2)\gamma_\mu u(k_1)$ je maticový element EM toku elektrónu, Q štvorhybnosť odovzdanú fotónom a $\langle p_2 | J_\mu(0) | p_1 \rangle$ maticový element EM toku medzi počiatočným a konečným stavom hadrónu.

Keď zo spinových parametrov a hybností hadrónov p_1, p_2 zostrojíme maximálny počet lineárne nezávislých kovariantov $X_\mu(p_1, p_2)$ s tými istými lorentzovskými transformačnými vlastnosťami, aké má maticový element elektromagnetického toku hadrónu, potom

$$\langle p_2 | J_\mu(0) | p_1 \rangle = \sum_r X_\mu^r(p_1, p_2) F_r(t), \quad (2)$$

kde $F_r(t)$ je elektromagnetický formfaktor (EM FF) hadrónu.

Preberieme konkrétne prípady rozptylu elektrónov na hadrónoch s určitým spinom. Kvôli jednoduchosti začneme s bezspinovými piónmi a kaónmi.

Všeobecné vyjadrenie maticového elementu EM toku $\langle k_2 | J_\mu | k_1 \rangle$ medzi počiatočným a konečným stavom piónu môže byť presne určené, vychádzajúc z predpokladu relativistickej invariantnosti a zachovania EM toku piónu. Pretože spin piónu je rovný nule, na vytvorenie súboru lineárne nezávislých kovariantov máme iba 2 štvorhybnosti k_1 a k_2 . Teda môžeme napríklad napísať vzťah

$$\langle k_2 | J_\mu | k_1 \rangle = f_1(t) k_{1\mu} + f_2(t) k_{2\mu},$$

ktorý pomocou zachovania EM toku piónu

$$\partial_\mu J_\mu = [P_\mu, J_\mu] = 0$$

upravíme na tvar

$$\begin{aligned} \langle k_2 | \partial_\mu J_\mu | k_1 \rangle &= \langle k_2 | [P_\mu, J_\mu] | k_1 \rangle = (k_2 - k_1)_\mu \langle k_2 | J_\mu | k_1 \rangle = \\ &= f_1(t)(k_1.k_2) - m_\pi^2 f_2(t) + m_\pi^2 f_1(t) - f_2(t)(k_1.k_2), \end{aligned}$$

odkiaľ získame nasledovný vzťah

$$[f_1(t) - f_2(t)][(k_1.k_2) + m_\pi^2] = 0.$$

Keďže

$$\begin{aligned} (k_1.k_2) &\neq -m_\pi^2, \\ f_1(t) &= f_2(t) \equiv eF_\pi(t) \end{aligned} \tag{3}$$

a

$$\langle k_2 | J_\mu | k_1 \rangle = e(k_1 + k_2)_\mu F_\pi(t). \tag{4}$$

To znamená, že EM štruktúra piónu je úplne popísaná jediným EM FF. V prípade zahrnutia nenulového izospinu piónov sa počet EM FF nezvyšuje, teda záporne aj kladne nabitý pión je popísaný tým istým FF. $F_\pi(t)$ je úmerný tretej komponente izovektoru, určujúcej náboj piónu.

Úplne analogicky možno ukázať, že existuje iba jeden FF kaónu $F_{K^+}(t)$ a jeden FF $F_{K^0}(t)$ opisujúci štruktúru kladne nabitého a neutrálneho kaónu.

K^+ a K^0 patria do jedného izomultipletu. Preto namiesto EM toku nabitého a EM toku neutrálneho kaónu možno zaviesť EM tok kaónu a objasniť, aká je jeho štruktúra s ohľadom na transformačné vlastnosti v izopriestore. Možno ukázať že sa dá rozdeliť na súčet izoskalárnej a izovektorovej časti. V súvislosti s tým sa zavádzajú izoskalárny $F_K^{(s)}(t)$ a izovektorový $F_K^{(v)}(t)$ FF kaónu, ktoré súvisia s formfaktormi nabitého a neutrálneho kaónu nasledovným spôsobom

$$\begin{aligned} F_K^{(s)}(t) &= \frac{1}{2}[F_{K^+}(t) + F_{K^0}(t)] \\ F_K^{(v)}(t) &= \frac{1}{2}[F_{K^+}(t) - F_{K^0}(t)]. \end{aligned} \tag{5}$$

V prípade častíc so spinom $1/2$, napr. nukleónov, je situácia zložitejšia. Vtedy sa kovarianty $X_\mu(p_1, p_2)$ konštruujú zo štvorhybností p_1, p_2 , dirakovských matíc a bispinorov. Nás zaujíma najmä všeobecný (prípustný) tvar fotónovo-nukleónového operátora O_μ , určeného vzťahom

$$\langle p_2 | J_\mu(0) | p_1 \rangle = e \bar{u}(p_2) O_\mu u(p_1),$$

ktorý by mal mať transformačné vlastnosti lorentzovského vektora. Tieto vlastnosti majú štvorvektory

$$\begin{aligned} & 1(p_2 - p_1)_\mu, \quad 1(p_2 + p_1)_\mu, \quad \gamma_\mu, \quad \gamma_5 \gamma_\mu, \quad \gamma_5(p_2 - p_1)_\mu, \quad \gamma_5(p_2 + p_1)_\mu, \\ & \sigma_{\mu\nu}(p_2 - p_1)^\nu, \quad \sigma_{\mu\nu}(p_2 + p_1)^\nu, \quad \gamma^5 \sigma_{\mu\nu} \gamma^\nu, \quad \gamma^5 \sigma_{\mu\nu}(p_2 + p_1)^\nu, \end{aligned} \quad (6)$$

kde $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = \frac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$ a $\gamma_5 = i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$.

Maticový element pružného rozptylu elektrónu na nukleóne v najnižšom ráde poruchovej teórie pozostáva zo súčiny $\bar{u}(p_2) O_\mu u(p_1)$ a maticového elementu operátora γ_μ prechodu elektrónu medzi príslušným počiatočným a konečným stavom. Obidva maticové elementy by mali mať rovnaké transformačné vlastnosti vzhľadom na Lorentzovu grupu. To vylučuje zo vzťahu (6) všetky výrazy, obsahujúce maticu γ_5 , pretože spôsobujú nežiadúcu priestorovú paritu.

Prvý člen v (6) vďaka zachovaniu EM toku

$$(p_2 - p_1)_\mu \langle p_2 | J_\mu(0) | p_1 \rangle = 0$$

sa takisto vyruší, pretože fotón vo fotónovo-nukleónovom vertexe je virtuálny a $Q^2 = (p_2 - p_1)^2 \neq 0$.

Pre zložku $\sigma_{\mu\nu}(p_1 - p_2)^\nu$, použitím Diracovej rovnice pre $\bar{u}(p_2), u(p_1)$ a antikomutačného vzťahu pre γ_μ maticu, je možné ukázať že

$$\bar{u}(p_2) \sigma_{\mu\nu}(p_1 + p_2)^\nu u(p_1) = u(p_2)(p_1 - p_2)_\mu u(p_1).$$

Odtiaľ vidno, že člen $\sigma_{\mu\nu}(p_1 + p_2)^\nu$ možno tiež vďaka zachovaniu EM toku vylúčiť.

Takýmto spôsobom, najvšeobecnejšie vyjadrenie maticového elementu EM toku nukleónu vyhovujúce požiadavkám lorentzovskej a gradientnej invariantnosti, má tvar

$$\langle p_2 | J_\mu | p_1 \rangle = \frac{e}{(2\pi)^3} \bar{u}(p_2) [\gamma_\mu F_1(t) + \frac{1}{2M} \sigma_{\mu\nu} (p_2 - p_1)^\nu F_2(t)] u(p_1), \quad (7)$$

kde $F_1(t)$, $F_2(t)$ sú Diracov a Pauliho FF a M je hmotnosť nukleónu. Výraz je rovnaký pre prípad protónu aj neutrónu.

Jednako, pri zavedení EM FF týchto častíc sme uvažovali zvlášť elektromagnetický tok protónu a neutrónu. Keďže protón a neutrón tvoria izodublet, je možné zaviesť EM tok nukleónu a využiť jeho transformačné vlastnosti v izotopickom priestore.

Ako je známe, EM tok nukleónov sa v prípade izotopických rotácií dá upraviť na súčet izotopického skalára a tretej zložky izotopického vektora. V dôsledku toho je maticový element EM toku nukleónov možné rozložiť na súčet elementov izoskalárneho a izovektorového EM toku nasledujúcim spôsobom:

$$\langle N(p_2) | J_\mu | N(p_1) \rangle = \langle N(p_2) | J_\mu^{(s)} | N(p_1) \rangle + \langle N(p_2) | J_\mu^{(v)} | N(p_1) \rangle, \quad (8)$$

kde $N(p)$ je osemzložkový nukleónový spinor, predstavujúci priamy súčin Diracovho bispinora a izotopického dvojkomponentného spinora.

Na druhej strane, využitím projekčných operátorov $(1 \pm \tau_3)/2$ (kde τ_3 je Pauliho matica) dvoch stavov nukleónu, určených vzťahmi

$$\begin{aligned} \frac{1 + \tau_3}{2} |p\rangle &= |p\rangle, & \frac{1 + \tau_3}{2} |n\rangle &= |0\rangle \\ \frac{1 - \tau_3}{2} |p\rangle &= |0\rangle, & \frac{1 - \tau_3}{2} |n\rangle &= |n\rangle \end{aligned}$$

možno ten istý maticový element EM toku nukleónov napísať v tvare

$$\begin{aligned} \langle N(p_2) | J_\mu | N(p_1) \rangle &= e \bar{N}(p_2) \left\{ \gamma_\mu [F_1^p(t) \frac{1 + \tau_3}{2} + F_1^n(t) \frac{1 - \tau_3}{2}] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma_{\mu\nu} (p_2 - p_1)^\nu}{2M} [F_2^p(t) \frac{1 + \tau_3}{2} + F_2^n(t) \frac{1 - \tau_3}{2}] \right\} N(p_1), \quad (9) \end{aligned}$$

z ktorého priamo dostávame výraz

$$N(p_2) | J_\mu | N(p_1) \rangle =$$

$$\begin{aligned}
& e\bar{N}(p_2) \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{2} [F_1^p(t) + F_1^n(t)] + \frac{\sigma_{\mu\nu}(p_2 - p_1)^\nu}{2M} \frac{1}{2} [F_2^p(t) + F_2^n(t)] \right\} N(p_1) + \\
& + e\bar{N}(p_2) \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{2} [F_1^p(t) - F_1^n(t)] + \frac{\sigma_{\mu\nu}(p_2 - p_1)^\nu}{2M} \frac{1}{2} [F_2^p(t) - F_2^n(t)] \right\} \tau_3 N(p_1), \quad (10)
\end{aligned}$$

odkiaľ porovnaním s (8) dostávame izoskalárne a izovektorové nukleónové formfaktory

$$\begin{aligned}
F_1^{(s)}(t) &= \frac{1}{2} [F_1^p(t) + F_1^n(t)], & F_2^{(s)}(t) &= \frac{1}{2} [F_2^p(t) + F_2^n(t)], \\
F_1^{(v)}(t) &= \frac{1}{2} [F_1^p(t) - F_1^n(t)], & F_2^{(v)}(t) &= \frac{1}{2} [F_2^p(t) - F_2^n(t)]. \quad (11)
\end{aligned}$$

Zavedenie týchto FF pri opise EM štruktúry hadrónov je výhodné z hľadiska konštrukcie rôznych modelov, lebo všetky existujúce vektorové mezóny s kvantovými číslami fotónu sa delia na skupinu izoskalárov a skupinu izovektorov.

Analogicky je možné zaviesť EM FF popisujúce štruktúru izodubletu ${}^3\text{He}$, ${}^3\text{H}$, ktorý má tiež spin $1/2$.

Z ľahkých jadier možno ešte spomenúť jadro ${}^4\text{He}$, ktoré je bezspinovým izosingletom, preto mu odpovedá iba jeden izoskalárny formfaktor $F_{4\text{He}}^{(s)}(t)$, úplne opisujúci štruktúru ${}^4\text{He}$.

Dá sa ukázať, že pokiaľ z troch štvorhybností Q , p_1 , p_2 fotón-hadrónového vertexu (pričom fotón je vo virtuálnom stave) možno nájsť len jeden nezávislý relativistický invariant t a všetky EM FF hadrónov sú vždy funkciami tejto jednej premennej.

Skutočne, vo vertexe fotón-hadrón-hadrón platí zákon zachovania štvorhybností

$$p_1 + Q = p_2.$$

Keď postupne vynásobíme túto rovnicu Q , p_1 a p_2 , dostaneme systém 3 rovníc

$$\begin{aligned}
Qp_1 + Q^2 &= Qp_2 \\
p_1^2 + Qp_1 &= p_1p_2 \\
p_1p_2 + Qp_2 &= p_2^2, \quad (12)
\end{aligned}$$

v ktorých vystupujú 4 invarianty Qp_1 , Qp_2 , Q^2 a p_1p_2 . Ďalej, predpokladajúc, že $p_1^2 = p_2^2 = -M^2$, kde M je hmotnosť príslušného hadrónu, dostaneme jeden voľný invariant, ktorý sa zvyčajne vyberá v tvare $t = -(p_2 - p_1)^2 = -Q^2$.

3 Súčasný stav teoretických predpovedí správania sa elektromagnetických formfaktorov hadrónov

Pružný elektrónový rozptyl $e^- H \rightarrow e^- H$ a anihilácia $e^+ e^- \rightarrow H \bar{H}$, kde H znamená ľubovoľný silnointeragujúci objekt (tiež atómové jadrá), sú najčastejšie procesy, v ktorých sa vyskytujú EM FF. Účinné prierezy týchto procesov sú určené kvadrátom absolútnej hodnoty odpovedajúcich amplitúd, ktoré vieme vypočítať v rámci poruchového rozvoja kvantovej elektrodynamiky podľa konštanty jemnej štruktúry $\alpha \simeq 1/137$. Pretože hodnota konštanty jemnej štruktúry $\alpha \ll 1$, odpovedajúce amplitúdy je možné prakticky uvažovať v jednofotónovej aproximácii

$$M(e^- H \rightarrow e^- H) \simeq M^\gamma(s, t) = e^2 \bar{u}(k_1) \gamma_\mu u(k_1) \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \langle H | J_\nu^{EM} | H \rangle$$

a

$$M(e^+ e^- \rightarrow H \bar{H}) \simeq M^\gamma(t, s) = e^2 \bar{v}(k_1) \gamma_\mu u(k_1) \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \langle 0 | J_\nu^{EM} | H \bar{H} \rangle,$$

kde $g_{\mu\nu}/q^2$ je propagátor fotónu a $\langle H | J_\nu^{EM} | H \rangle$ resp. $\langle 0 | J_\nu^{EM} | H \bar{H} \rangle$ je maticový element hadrónového EM prúdu, ktorý vďaka priestorovej nebodovosti hadrónu H nie je známy. Preto býva v praxi, ako sme už spomenuli v predchádzajúcej kapitole, rozložený podľa maximálneho počtu lineárne nezávislých relativistických kovariantov, skonštruovaných zo štvorhybností a spinových parametrov hadrónu H , a to nasledovne

$$\langle H | J_\mu^{EM} | H \rangle = \sum_i R_\mu^i F^i(t)$$

alebo

$$\langle H \bar{H} | J_\mu^{EM} | 0 \rangle = \sum_i X_\mu^i F^i(t),$$

kde skalárne koeficienty $F^i(t)$ sú EM FF hadrónov ako funkcie jednej invariantnej premennej t , čo je druhá mocnina prenesenej štvorhybnosti virtuálnym fotónom.

Počet $F^i(t)$ závisí od spinu S hadrónu H .

Ak $S = 0$ (t.j. $\pi^\pm, K^\pm, K^0, \bar{K}^0, {}^4\text{He}, {}^{12}\text{C}, {}^{16}\text{O}$ atď.), existuje len jeden EM FF definovaný vzťahom

$$\langle H | J_\mu^{EM} | H \rangle = (p + p')_\mu F_C(t). \quad (13)$$

Principiálne nie je problém získať informácie o $|F_C(t)|$ v priestorupodobnej aj časupodobnej oblasti z odpovedajúcich experimentov, pretože $d\sigma/d\Omega \sim |F_C(t)|^2$, ale dáta pre jadrá sa doteraz podarilo získať iba pre $t < 0$. Navyše, z pohľadu jadrovej fyziky neexistuje pojem EM FF jadier v časupodobnej oblasti ($t > 0$).

Následkom zloženej povahy jadier sa objavujú tzv. difrakčné minimá v $|F_C(t)|$ pre $t < 0$, ktoré sa interpretujú ako nulové hodnoty $F_C(t)$ na reálnej osi komplexnej roviny t . Pri experimentálnom vyšetrowaní ťažších zložených jadier bolo pozorované, že počet difrakčných miním sa zväčšuje v rovnakej oblasti hodnôt kvadrátu prenesenej štvorhybnosti.

V prípade hadrónov H s $S = 1/2$ (napr. p, n, Λ , Σ^+ , Σ^0 , Σ^- , Ξ^0 , Ξ^- , ${}^3\text{He}$, ${}^3\text{H}$, atď.) je na opis štruktúry častíc potrebné zaviesť dva EM FF. Väčšinou sa vyberajú elektrický $G_E(t)$ a magnetický $G_M(t)$ formfaktor, ktoré sú vyjadrené cez dirakovský $F_1(t)$ a pauliovský $F_2(t)$ formfaktor, definované vzťahom (6), nasledovným spôsobom:

$$G_E(t) = F_1(t) + \frac{t}{4m_H^2} F_2(t); \quad G_M(t) = F_1(t) + F_2(t). \quad (14)$$

$G_E(t)$ a $G_M(t)$ v oblasti $t < 0$ môžu byť jednoducho určené z experimentálnych údajov o diferenciálnych účinných prierezoch z parametrov priamky tzv. Rosenbluthovej schémy

$$\frac{d\sigma(e^- H \rightarrow e^- H)}{d\Omega} \left\{ \frac{\alpha^2 \cos^2(\vartheta/2)}{4E^2 \sin^4(\vartheta/2) [1 + (2E/M) \sin^2(\vartheta/2)]} \right\}^{-1} \quad (15)$$

v laboratórnom systéme verzus $\tan^2(\vartheta/2)$ pri fixnom t .

Všetky existujúce dáta o $G_E(t)$ a $G_M(t)$ pri $t > 0$ sú získané z $\sigma_{tot}(e^+ e^- \leftrightarrow H \bar{H})$ za predpokladu, že $|G_E(t)| = |G_M(t)|$, alebo $|G_E(t)| = 0$.

Ak $S = 1$ (napr. vektorové mezóny, deuterón atď.), potom na úplný popis EM štruktúry hadrónov sú potrebné tri formfaktory, ktoré sa zvyčajne volia v tvare nábojového $G_C(t)$, magnetického $G_M(t)$ a kvadrupólového $G_Q(t)$ formfaktora. Tieto sú definované nasledovne:

$$\langle H | J_\mu^{EM} | H \rangle = F_1(t) (\xi'^* \cdot \xi) d_\mu + F_2(t) [\xi_\mu (\xi'^* \cdot q) - \xi_\mu^* (\xi \cdot q)] - F_3 \frac{(\xi \cdot q) (\xi'^* \cdot q)}{2m_H^2} d_\mu, \quad (16)$$

kde ξ a ξ' sú polarizačné vektory pre vchádzajúci a vychádzajúci hadrón so štvorhybnosťami p a p'

$$\xi' \cdot p' = 0; \xi \cdot p = 0; \xi'^2 = -1, \xi^2 = -1, d_\mu = (p' + p)_\mu; q_\mu = (p' - p)_\mu$$

a

$$\begin{aligned} G_C(t) &= F_1(t) - \frac{t}{6m_H^2} G_Q(t) \\ G_M(t) &= F_2(t) \\ G_Q(t) &= F_1(t) - F_2(t) + \left(1 + \frac{t}{4m_H^2} F_3(t)\right). \end{aligned} \quad (17)$$

$G_C(t)$, $G_M(t)$ a $G_Q(t)$ sa dajú určiť z $d\sigma/d\Omega$ procesu $e^- H \rightarrow e^- H$ v polarizovaných experimentoch. Inak môžeme z $d\sigma/d\Omega$ získať len štruktúrne funkcie $A(t)$ a $B(t)$ definované vzťahom

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 E' \cos^2(\vartheta/2)}{4E^3 \sin^4(\vartheta/2)} [A(t) + B(t) \tan^2(\vartheta/2)], \quad (18)$$

kde

$$\begin{aligned} A(t) &= -\frac{t}{6m_H^2} \left(1 - \frac{1}{4m_H^2}\right) G_M^2(t) + G_C^2(t) + \frac{t^2}{18m_H^4} G_Q^2(t), \\ B(t) &= -\frac{t}{3m_H^2} \left(1 - \frac{1}{4m_H^2}\right)^2 G_M^2(t). \end{aligned} \quad (19)$$

Na druhej strane, z účinného prierezu

$$\begin{aligned} \sigma_{tot}(e^+ e^- \rightarrow H \bar{H}) &= \frac{\pi \alpha^2 \beta_H^3}{3t} \left\{ \frac{t}{m_H^2} |G_C(t) + G_M(t) + G_Q(t)|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[2 |G_C(t) + \frac{t}{2m_H^2} G_Q(t)|^2 + |G_C(t) + \frac{t}{2m_H^2} G_M(t)|^2 \right] \right\} \quad (20) \end{aligned}$$

môžeme okamžite vidieť, že nie je jednoduché získať experimentálnu informáciu o EM FF v oblasti $t > 0$.

Pre silnointeragujúce hadróny s $S > 1$ je situácia komplikovanejšia a všeobecné riešenie dodnes nie je známe.

Ak zosumarizujeme naše experimentálne poznatky o správaní EM FF, prídeme k záveru, že všetky majú podobný priebeh, ale líšia sa asymptotickým správaním, normou v bode $t = 0$, počtom píkov odpovedajúcich vektorovomezónovým rezonanciám a tvarom a výškou píkov.

Očakáva sa, že správanie EM FF bude predpovedateľné vhodnou dynamickou teóriou silných interakcií. Dodnes ale neexistuje teória schopná predpovedať realistické správanie $|F(t)|$ pre $-\infty < t < +\infty$.

Veľkým pokrokom vo fyzike elementárnych častíc bol objav kvark- gluónovej štruktúry hadrónov a priamej súvislosti medzi asymptotickým správaním EM FF a počtom stavebných kvarkov n_q hadrónu H

$$F(t)|_{t \rightarrow \infty} \sim t^{1-n_q}, \quad (21)$$

čo je v zhode s existujúcimi experimentálnymi hodnotami.

Ako už bolo povedané vyššie, dynamickou teóriou silných interakcií na popis správania EM FF je kvantová chromodynamika (QCD), kalibračno-invariantná lokálna kvantová teória poľa interakcií kvarkov a gluónov. Avšak, následkom asymptotickej voľnosti QCD, v rámci poruchovej teórie je táto schopná reprodukovať iba vyššie uvedené asymptotické správanie (21) (až na logaritmické korekcie) v priestoropodobnej oblasti.

Dokonca ani sumačné pravidlá neporuchovej QCD, pomocou ktorých sa podarilo predpovedať správanie EM FF v obmedzenej oblasti $t < 0$, neriešia problém správania sa EM FF v rámci QCD úplne.

Pre úplnosť sa zmienime o chirálnom poruchovom prístupe, pomocou ktorého sa darí získať presný opis správania EM FF hadrónov okolo bodu $t = 0$. Toto je veľmi dôležité, pretože chirálny poruchový prístup je ekvivalentný QCD pri nízkych energiách, kde bežiacia väzbová konštanta $\alpha_s(t)$ dosahuje vysoké hodnoty a poruchová QCD je nepoužiteľná.

Keď to zhrnieme, QCD ani jej ekvivalenty nedávajú žiadne kvantitatívne predpovede v najdôležitejšej časti časupodobnej oblasti ($4m_\pi^2 < t \leq 5 \text{ GeV}^2$), kde EM FF sú komplexnými funkciami t a e^+e^- experimenty svedčia o netriviálnom správaní sa meraných účinných prierezov, zapríčinenom vznikom rôznych nestabilných vektorovomezónových stavov.

Preto v súčasnosti fenomenologický prístup založený na syntéze experimentálnej skutočnosti vzniku nestabilných vektorových mezónov v procese anihilácie páru e^+e^- a vzniku hadrónov, asymptotického správania sa odpovedajúceho počtu stavebných kvarkov a analytických vlastností, je stále najúspešnejším spôsobom teoretického popisu správania sa EM FF hadrónov. Ale doteraz najbežnejšie používaným modelom FF je model dominantnosti vektorových mezónov, ktorý popisuje vznik vektorových mezónov v e^+e^- ani-

hilácii vzťahom

$$F(t) = \sum_V \frac{f_{VH\bar{H}}}{f_V} \frac{m_V^2}{m_V^2 - t}, \quad (22)$$

kde $f_{VH\bar{H}}$ a f_V sú vektorovo-mezónovo hadrónové a univerzálne vektorovo-mezónové väzbové konštanty a m_V sú hmotnosti vektorových mezónov.

4 Model dominantnosti vektorových mezónov

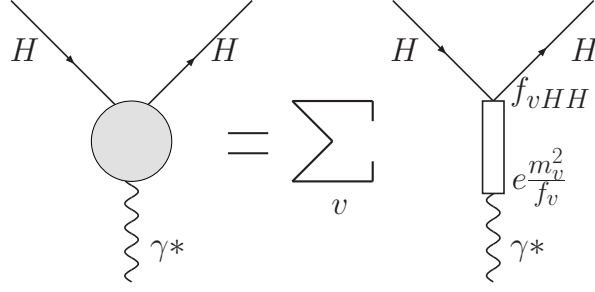
Ako je známe, vo všeobecnosti sa elektromagnetický tok hadrónov v izotopickom priestore transformuje ako suma izotopického skaláru a tretej komponenty izotopického vektoru. Takéto transformačné vlastnosti EM toku súvisia s nezachovaním izospinu v EM interakciách hadrónov, v dôsledku čoho sa pri emitovaní alebo pohltení fotónu hadrónom môže izospin zmeniť o 1. Preto môžeme fotón považovať za superpozíciu stavov s izotopickým spinom 0 (izoskalárny fotón) a s izotopickým spinom 1 (izovektorový fotón). Keďže neutrálne vektorové mezóny s izospinom 0 alebo 1 sa svojimi kvantovými číslami zhodujú s kvantovými číslami fotónu a líšia sa od neho iba hmotnosťou, je odôvodnený predpoklad, že medzi fotónmi a neutrálnymi vektorovými mezónmi sú možné virtuálne prechody. Táto hypotéza je experimentálne podporená existenciou rozpadov neutrálnych vektorových mezónov V^0 na leptón-antileptónové páry. Ak predpokladáme existenciu prechodov $\gamma \leftrightarrow V^0$, potom rozpad $V^0 \rightarrow l^+l^-$ prebieha tak, že vektorový mezón najskôr prejde na virtuálny fotón a ten sa následne rozpadá na pár leptón-antileptón.

Tento mechanizmus môžeme zovšeobecniť na ľubovoľný proces interakcie fotónu s hadrónom, pri ktorom najprv fotón prejde na neutrálny vektorový mezón a ten následne interaguje s hadrónom rovnako ako v prípade silnej interakcie dvoch hadrónov. Potom EM formfaktor hadrónu možno vyjadriť sumou diagramov interakcií s rôznymi vektorovými mezónmi (pozri obr.1), čím získame vzťah

$$eF_H(t) = \sum_V \frac{g_{\gamma V} f_{VH\bar{H}}}{m_V^2 - t},$$

kde $f_{VH\bar{H}}$ sú väzbové konštanty vektorových mezónov s hadrón-antihadrónovým párom, $g_{\gamma V}$ väzbové konštanty medzi vektorovými mezónmi a fotónom a m_V sú hmotnosti vektorových mezónov.

Ak tento vzťah využijeme konkrétne pre zápis formfaktoru piónu a izovektorových častí kaónových a nukleónových formfaktorov, pričom sa obmedzíme len na ρ rezonanciu, dostaneme vyjadrenia



Obrázok 1: Grafická prezentácia VMD modelu

$$\begin{aligned}
 eF_\pi(t) &= \frac{g_{\gamma\rho}f_{\rho\pi\pi}}{m_\rho^2 - t} \\
 eF_K^{(v)}(t) &= \frac{g_{\gamma\rho}f_{\rho K\bar{K}}}{m_\rho^2 - t} \\
 eF_1^{(v)}(t) &= \frac{g_{\gamma\rho}f_{\rho N\bar{N}}^{(1)}}{m_\rho^2 - t}.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Podmienka normovanosti pre $t = 0$ vedie k identitám

$$\begin{aligned}
 e &= \frac{g_{\gamma\rho}f_{\rho\pi\pi}}{m_\rho^2} \\
 \frac{e}{2} &= \frac{g_{\gamma\rho}f_{\rho K\bar{K}}}{m_\rho^2} \\
 \frac{e}{2} &= \frac{g_{\gamma\rho}f_{\rho N\bar{N}}^{(1)}}{m_\rho^2},
 \end{aligned} \tag{24}$$

z ktorých vyplýva univerzálnosť interakcie ρ mezónu vyjadrená vzťahom

$$f_{\rho\pi\pi} = 2f_{\rho K\bar{K}} = 2f_{\rho N\bar{N}}^{(1)} = \dots = f_\rho, \tag{25}$$

kde konštanta f_ρ sa nazýva univerzálna väzbová konštanta ρ mezónu. Potom väzbovú konštantu medzi ρ mezónom a fotónom, $g_{\gamma\rho}$, možno vyjadriť vzťahom

$$g_{\gamma\rho} = e \frac{m_\rho^2}{f_\rho},$$

alebo v prípade ľubovoľného vektorového mezónu V nadobúda tvar

$$g_{\gamma V} = e \frac{m_V^2}{f_V}. \quad (26)$$

Všeobecne sa dá EM tok hadrónov $J_\mu^{EM}(x)$ zapísať ako lineárna kombinácia polí vektorových mezónov

$$J_\mu^{EM}(x) = \sum_V \frac{m_V^2}{f_V} V_\mu(x). \quad (27)$$

V rámci kvantovej chromodynamiky (QCD) môžeme VMD model interpretovať ako interakciu kvark-antikvarkového páru tvoriaceho vektorový mezón, ktorý vznikol prechodom z virtuálneho fotónu. Model dominantnosti vektorových mezónov vedie k viacerým výsledkom popisujúcim EM vlastnosti hadrónov, ktoré sú testovateľné experimentálne. Ukazuje sa, že teoretické výsledky sa zhodujú s experimentálnymi hodnotami s presnosťou 20 - 30 percent. Presnejší popis experimentálnych údajov je možné dosiahnuť iba v rámci unitárneho a analytického modelu, spočívajúceho v analytických vlastnostiach FF.

5 Analytické vlastnosti elektromagnetických formfaktorov hadrónov a ľahkých jadier

V podstate existujú dva zdroje informácií o analytických vlastnostiach FF silnointeragujúcich častíc. Prvý z nich spočíva v presnom dôkaze analytičnosti, vychádzajúc zo základných princípov lokálnej kvantovej teórie poľa. Touto cestou boli dokázané napríklad analytické vlastnosti FF piónu (hoci v súčasnosti v súvislosti s predstavami o kvark-gluónovej štruktúre hadrónov tento matematicky náročný dôkaz je možné použiť v takom priblížení, v akom možno uviesť hadrón do súladu s lokálnym kvantovým poľom). Žiaľ, doteraz sa nikomu nepodarilo odvodiť zo základných princípov lokálnej kvantovej teórie poľa analytické vlastnosti všetkých ostatných FF, ktoré sú neustále využívané v praxi. V tomto prípade pri vyšetrovaní správania sa skúmaných FF sa používajú metódy štúdia analytických vlastností Feynmanových grafov formálneho nekonečného radu, získaného pre FF v rámci poruchovej teórie Lagrangeovej kvantovej teórie poľa. Podstatu tohoto prístupu [3] budeme demonštrovať v nasledujúcom paragrafe.

5.1 Vyšetřovanie analytických vlastností formfaktorov pomocou Feynmanových diagramov poruchovej teórie

Jednotlivé členy radu poruchovej teórie majú analytické vlastnosti neprotirečiace všeobecným princípom lokálnej kvantovej teórie poľa. Ktorýkoľvek Feynmanov diagram môže byť napísaný v tvare integrálu

$$I_\varepsilon(t) = \int d^4k_1 \dots d^4k_l \frac{N}{\prod_{j=1}^n (q_j^2 + m_j^2 + i\varepsilon)}, \quad \varepsilon > 0, \quad \varepsilon \ll 1 \quad (28)$$

kde q_j označuje štvorhybnosť j -teho propagátora v diagrame a m_j je odpovedajúca hmotnosť. N v čitateli predstavuje spinovú štruktúru Feynmanovho diagramu a neprispieva k objaveniu sa singularít. Premenné k_j ($j = 1, \dots, l$) sú štvorhybnosti spojené s l nezávislými slučkami, ktoré môžu byť vybraté ľubovoľne, ale s ohľadom na zákon zachovania štvorhybností.

Pri vyšetřovaní analytických vlastností Feynmanových diagramov je vhodný takzvaný α -prístup. Označením $q_j^2 + m_j^2 = u_j$ a použitím Feynmanovho vzťahu

$$\frac{1}{u_1 \dots u_n} = (n-1)! \int_0^1 d\alpha_1 \dots d\alpha_n \frac{\delta(1 - \sum \alpha_j)}{[\sum_{j=1}^n \alpha_j u_j]^n} \quad (29)$$

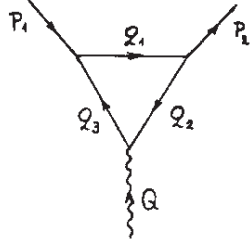
prepíšeme integrál do nasledujúceho tvaru:

$$I_\varepsilon(t) = (n-1)! \int_0^1 d\alpha_1 \dots d\alpha_n \int d^4k_1 \dots d^4k_l \frac{N \delta(1 - \sum \alpha_j)}{[\sum_{j=1}^n \alpha_j u_j + i\varepsilon]^n}. \quad (30)$$

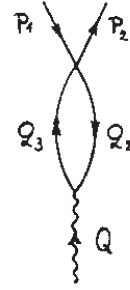
Nájsť singularity jednotlivého člena radu poruchovej teórie znamená preskúmať analytické vlastnosti integrálov typu $I_\varepsilon(t)$ v (30).

Úlohu hľadania singularít všeobecného integrálu tohto typu Landau previedol na rad nutných podmienok (takzvaných Landauových rovníc), ktoré môžu byť sformulované nasledovným spôsobom. Integrál $I_\varepsilon(t)$ má singularity:

- i) keď buď $\alpha_j = 0$ alebo $q_j^2 = -m_j^2$ pre každú j -tu vnútornú čiaru
- ii) $\sum_{i=1}^n \alpha_i q_i = 0$ pre každú nezávislú slučku.



Obrázok 2: Trojuholníkový diagram



Obrázok 3: Žubrienkový diagram

Ak sa obmedzíme na hľadanie singularít len na fyzikálnom liste Riemannovej plochy, k spomínaným podmienkam sa pridruží ešte jedna:

- iii) α_j musia byť reálne kladné čísla.

Z prvej podmienky vyplýva, že v diagrame, majúcom singularitu, sa buď každá vnútorná štvorhybnosť nachádza na hmotnostnej nadploche, alebo odpovedajúce α_j je rovné nule a v tom prípade sa štvorhybnosť q_j neobjavuje v druhej podmienke teda prítomnosť vnútornej čiary v diagrame nepôsobí na vzniknutú singularitu. Inými slovami, tá istá singularita môže byť získaná z Feynmanovho diagramu, v ktorom vnútorná čiara, prislúchajúca α_j vo východzom diagrame, je nahradená bodom.

Diagramy, ktoré získame zo základného odstránením jednej alebo viacerých vnútorných kriviek (odpovedajúce vertexy sa spájajú do jedného bodu) sa nazývajú redukovanými diagramami.

V ďalšom sú popisované dva typy Feynmanových diagramov, trojuholníkový, zobrazený na obr. 2 a žubrienkový zobrazený na obr. 3. Oba tvoria body vetvenia, trojuholníkový anomálny a žubrienkový normálny (fyzikálny) prah.

Pri stanovení singularít môžeme vyjsť zo žubrienkového diagramu (obr. 3). Z tohto obrázku vyplýva

$$q_2^2 = -m_2^2, \quad q_3^2 = -m_3^2 \quad a \quad \alpha_2 q_2 + \alpha_3 q_3 = 0. \quad (31)$$

Postupným vynásobením posledného vzťahu v (31) pomocou q_2 a q_3 dostaneme systém rovníc

$$\begin{aligned} -\alpha_2 m_2^2 + \alpha_3 q_2 q_3 &= 0 \\ \alpha_2 q_2 q_3 - \alpha_3 m_3^2 &= 0, \end{aligned} \quad (32)$$

ktorý má netriviálne riešenie pre α_j vtedy a len vtedy, keď determinant systému je rovný nule, t.j.

$$\det \begin{pmatrix} -m_2^2 & q_2 q_3 \\ q_2 q_3 & -m_3^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (33)$$

alebo $m_2^2 m_3^2 - (q_2 q_3)^2 = 0$.

Využitím zákona zachovania štvorhybností $Q = p_2 - p_1 = q_3 - q_2$ a rovnosti $t = -Q^2$ dostávame vyjadrenie

$$q_2 q_3 = \frac{1}{2}[t - (m_2^2 + m_3^2)],$$

ktoré spolu so vzťahom pre determinant dáva nasledujúcu kvadratickú rovnicu

$$t^2 - 2(m_2^2 + m_3^2)t + (m_2^2 - m_3^2)^2 = 0. \quad (34)$$

Jej riešením je výraz

$$t = (m_2 \pm m_3)^2, \quad (35)$$

v ktorom len koreň so znamienkom $+$ vyhovuje tretej Landauovej nutnej podmienke. Žubrienkový diagram na obr. 3 má bod vetvenia na fyzikálnom liste Riemannovej plochy v $t = (m_2 + m_3)^2$, ktorý je známy ako normálny prah.

Ďalej nás zaujíma diagram na obr. 2, kde

$$q_1^2 = -m_1^2, \quad q_2^2 = -m_2^2, \quad q_3^2 = -m_3^2$$

a

$$\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 q_3 = 0. \quad (36)$$

Z tejto rovnice postupným násobením q_1 , q_2 a q_3 získame sústavu troch algebraických rovníc

$$\begin{aligned}
-\alpha_1 m_1^2 + \alpha_2 q_1 q_2 + \alpha_3 q_1 q_3 &= 0 \\
\alpha_1 q_1 q_2 - \alpha_2 m_2^2 + \alpha_3 q_2 q_3 &= 0 \\
\alpha_1 q_1 q_3 + \alpha_2 q_2 q_3 - \alpha_3 m_3^2 &= 0,
\end{aligned} \tag{37}$$

ktorá má netriviálne riešenie iba v prípade, keď determinant sústavy je rovný nule

$$\det \begin{pmatrix} -m_1^2 & q_1 q_2 & q_1 q_3 \\ q_1 q_2 & -m_2^2 & q_2 q_3 \\ q_1 q_3 & q_2 q_3 & -m_3^2 \end{pmatrix} = 0, \tag{38}$$

teda

$$-m_1^2 m_2^2 m_3^2 + 2(q_1 q_2)(q_1 q_3)(q_2 q_3) + m_1^2 (q_2 q_3)^2 + m_2^2 (q_1 q_3)^2 + m_3^2 (q_1 q_2)^2 = 0.$$

Využitím ďalších zákonov zachovania štvorhybností v odpovedajúcich vertexoch trojuholníkového diagramu

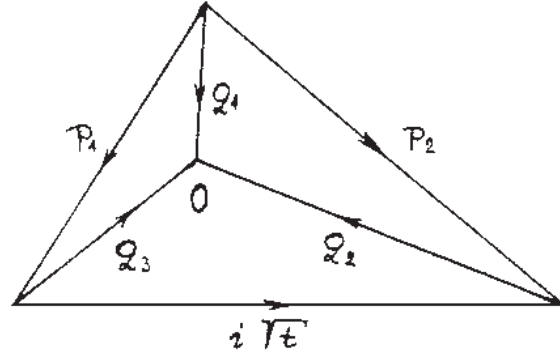
$$\begin{aligned}
p_2 - p_1 &= q_3 - q_2 \\
p_1 &= q_1 - q_3 \\
p_2 &= q_1 - q_2
\end{aligned} \tag{39}$$

a vzťahu $p_1^2 = p_2^2 = -M^2$ dostaneme pre skalárne súčiny štvorhybností v vystupujúcich v determinante (38) výrazy

$$\begin{aligned}
(q_2 q_3) &= \frac{1}{2}[t - (m_2^2 + m_3^2)] \\
(q_1 q_3) &= \frac{1}{2}[M^2 - (m_1^2 + m_3^2)] \\
(q_1 q_2) &= \frac{1}{2}[M^2 - (m_1^2 + m_2^2)],
\end{aligned}$$

na základe ktorých podmienka nulového determinantu vedie ku kvadratickej rovnici

$$m_1^2 t^2 + \left\{ [M^2 - (m_1^2 + m_2^2)][M^2 - (m_1^2 + m_3^2)] - 2m_1^2 (m_2^2 + m_3^2) \right\} t +$$



Obrázok 4: Duálny diagram k Feynmanovmu diagramu na obr. 2

$$+m_1^2(m_2^2 - m_3^2)^2 + m_2^2[M^2 - (m_1^2 + m_3^2)]^2 + m_3^2[M^2 - (m_1^2 + m_2^2)]^2 - \quad (40)$$

$$-(m_2^2 + m_3^2)[M^2 - (m_1^2 + m_2^2)][M^2 - (m_1^2 + m_3^2)] = 0.$$

Jej riešením sú výrazy

$$t = (m_2^2 + m_3^2) - \frac{1}{2m_1^2}[M^2 - (m_1^2 + m_2^2)][M^2 - (m_1^2 + m_3^2)] \pm$$

$$\pm \frac{1}{2m_1^2} \sqrt{4m_1^2 m_2^2 - [M^2 - (m_1^2 + m_2^2)]^2} \sqrt{4m_1^2 m_3^2 - [M^2 - (m_1^2 + m_3^2)]^2}, \quad (41)$$

ktoré určujú singularities EM FF z trojuholníkového diagramu, nazývané anomálnymi prahmi. Tieto na rozdiel od normálnych prahov neodpovedajú fyzikálnym procesom.

Anomálne prahy sa nachádzajú na fyzikálnom liste Riemannovej plochy, keď systém rovníc (37) má reálne a kladné riešenia α_j .

Najvhodnejším spôsobom na určenie umiestnenia anomálneho prahu trojuholníkového diagramu na fyzikálnom liste Riemannovej plochy sa zdá byť geometrický prístup k riešeniu Landauových rovníc, ktorého princíp je nasledujúci. Keď štvorvektor Q vyjadríme ako $i\sqrt{t}$, zo zákonov zachovania štvorhybností (39) dostaneme rovnosť

$$p_1 + i\sqrt{t} = p_2,$$

ktorá je zobrazená graficky na obr. 4.

Každý vnútorný trojuholník na obr. 4 zobrazuje zachovanie štvorhybností vo vertexoch diagramu obr. 2.

Landauova rovnica (36), vyjadrujúca lineárnu závislosť medzi q_1, q_2, q_3 , vyžaduje aby sa tieto tri vektory nachádzali v jednej rovine. Dĺžky q_j kladieme rovnými odpovedajúcim hmotnostiam m_j a dĺžky p_1 a p_2 hmotnosti M . Z toho vyplýva jednoznačné ohraničenie na tvar vonkajšieho trojuholníka na obr. 4.

Anomálny prah vyšetrovaného formfaktora, odpovedajúci diagramu na obr. 2 sa takto nachádza vyjadrením t z obr. 4, využitím metód elementárnej geometrie.

Diagram, zobrazený na obr. 4 sa nazýva "duálnym diagramom" k diagramu na obr. 2. Z jeho tvaru možno ešte usudzovať, či sa singularita nachádza na fyzikálnom liste alebo na jednom z nefyzikálnych listov Riemannovej plochy.

Podmienka kladnosti parametrov α_j , zabezpečujúca objavenie sa singularity na fyzikálnom liste, vedie k tomu (ako vyplýva z duálnych diagramov), že bod 0 na obr. 4 sa nachádza vnútri vonkajšieho trojuholníka. V opačnom prípade odpovedajúca singularita leží na niektorom z nefyzikálnych listov.

Nakoniec sa teda umiestnenie anomálneho prahu EM FF na fyzikálnom liste Riemannovej plochy generujúci trojuholníkovým diagramom určí výrazom (41) so znamienkom $+$.

6 Asymptotické podmienky pre elektromagnetické formfaktory hadrónov reprezentované VMD modelom

Asymptotické správanie FF pri veľkých hodnotách $|t|$ vyplývajúce z VMD parametrizácie je $\sim t^{-1}$. Tento priebeh však vo všeobecnosti nesúhlasí s kvarkovými počtovými pravidlami (QCR), ktorých platnosť je experimentálne potvrdená. Na základe týchto pravidiel je asymptotika FF funkciou počtu kvarkov tvoriacich hadrón $F(t) \sim t^{1-n_q}$, kde n_q je počet konštituentných alebo tiež valenčných kvarkov. To znamená, že ak je počet valenčných kvarkov $n_q > 2$, asymptotické správanie EM FF hadrónu sa líši od VMD modelu. Nezhodu asymptotík sa podarilo preklenúť transformáciou VMD reprezentácie, vedúcou k odvodeniu sústavy lineárnych homogénnych algebraických rovníc pre pomery väzbových konštánt. Táto metóda spočíva v úprave VMD parametrizácie (22) s n vektorovými mezónmi na spoločného menovateľa, čím dostaneme racionálnu funkciu s polynómom $(n-1)$ stupňa v čitateli, a následným položením koeficientov pred najvyššími mocninami t rovnými nule. Koeficienty takto získanej sústavy rovníc pre väzbové konštanty sú pomerne komplikovanými sumami súčinov obsahujúcimi kvadráty

vektorovo- mezónových hmotností.

Inú, jednoduchšiu sústavu rovníc je možné odvodiť vychádzajúc z predpokladu o analyticitosti EM FF hadrónu a použitím Cauchyho vety k EM FF (aj na FF vynásobený mocninami t). Tu by sme ale zdôraznili, že VMD formula (22), pre ktorú sa asymptotické podmienky odvádzujú, nevlastní využité analytické vlastnosti a to vzbudzuje nedôveru k odvodeným vzťahom.

Tento klasický problém VMD modelu sme vyriešili v práci [4], kde sme matematickou indukciou dokázali, že oba systémy sú ekvivalentné.

V prvom prístupe predpokladáme, že VMD formfaktor je nasýtený n rôznymi vektorovými mezónmi a má asymptotický tvar

$$F_{h|t| \rightarrow \infty} \sim t^{-m} \quad (42)$$

(kde $m \leq n$). Transformáciou VMD pólovej reprezentácie (22) na spoločného menovateľa dostaneme FF vo forme racionálnej funkcie s polynómom stupňa $(n - 1)$ v čitateli:

$$P_{n-1}(t) = A_0 + A_1 \cdot t + A_2 \cdot t^2 + \dots + A_{n-1} \cdot t^{n-1}. \quad (43)$$

Pritom

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= (-1)^{n-1} \sum_{j=1}^n m_j^2 a_j \\ A_{n-2} &= (-1)^{n-2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n m_i^2 \sum_{j=1}^n m_j^2 a_j \\ A_{n-3} &= (-1)^{n-3} \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2, i_r \neq j}}^n m_{i_1}^2 m_{i_2}^2 \sum_{j=1}^n m_j^2 a_j \\ A_{n-4} &= (-1)^{n-4} \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3=1 \\ i_1 < i_2 < i_3, i_r \neq j}}^n m_{i_1}^2 m_{i_2}^2 m_{i_3}^2 \sum_{j=1}^n m_j^2 a_j \\ &\dots\dots\dots \\ A_0 &= \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}=1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1}, i_r \neq j}}^n m_{i_1}^2 m_{i_2}^2 \dots m_{i_{n-2}}^2 m_{i_{n-1}}^2 \sum_{j=1}^n m_j^2 a_j \end{aligned} \quad (44)$$

a a_j je pomer väzbových konštánt, $a_j = (f_{jhh}/f_j)$. Na získanie asymptotiky $\sim t^{-m}$ potrebujeme aby $(m - 1)$ koeficientov pri najvyšších mocninách t bolo

rovných nule. Týmto spôsobom pre a_j získame nasledujúci systém rovníc:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n m_j^2 a_j = 0 \\
& \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n m_i^2 \sum_{j=1}^n m_j^2 a_j = 0 \\
& \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2, i_r \neq j}}^n m_{i_1}^2 m_{i_2}^2 \sum_{j=1}^n m_j^2 a_j = 0 \\
& \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3=1 \\ i_1 < i_2 < i_3, i_r \neq j}}^n m_{i_1}^2 m_{i_2}^2 m_{i_3}^2 \sum_{j=1}^n m_j^2 a_j = 0 \\
& \dots \dots \dots \\
& \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_{m-2}=1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_{m-2}, i_r \neq j}}^n m_{i_1}^2 m_{i_2}^2 \dots m_{i_{m-2}}^2 \sum_{j=1}^n m_j^2 a_j = 0.
\end{aligned} \tag{45}$$

Na druhej strane, ak vychádzame z predpokladu analytičnosti EM FF hadrónu, môžeme použiť Cauchyho vetu pre formfaktor v rovine t

$$\frac{1}{2\pi i} \oint F_h(t) dt = 0$$

s dráhou integrácie po kružnici polomeru $R \rightarrow \infty$, obchádzajúc rez na kladnej časti reálnej osi. Tento integrál možno rozložiť do tvaru

$$\frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{C_R} F_h(t) dt + \int_{+\infty}^{t_0} F_h(t - i\epsilon) dt + \int_{C_r/2} F_h(t) dt + \int_{t_0}^{+\infty} F_h(t + i\epsilon) dt \right\} \tag{46}$$

kde $\epsilon \ll 1$ a $C_r/2$ je polkružnica spájajúca vrchnú hranicu rezu so spodnou okolo bodu vetvenia t_0 . Integrál okolo kruhu s nekonečným polomerom je nula a tretí integrál v (46) pre $r \rightarrow 0$ je tiež rovný nule, to znamená, že ostávajú iba integrály na hornej a spodnej hranici rezu. Takže máme

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{t_0}^{\infty} [F_h(t + i\epsilon) - F_h(t - i\epsilon)] dt = 0. \tag{47}$$

Z podmienky reálnosti

$$F_h^*(t) = F_h(t^*) \tag{48}$$

vyplýva, že

$$\frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \text{Im}F_h(t) dt = 0, \quad (49)$$

čo je v podstate integrálne superkonvergenčné sumačné pravidlo pre imaginárnu časť FF. Rovnaká procedúra môže byť použitá pre funkcie $tF_h(t)$, $t^2F_h(t)$, \dots , $t^{m-2}F_h(t)$, pretože majú rovnaké analytické vlastnosti ako $F_h(t)$. Takýmto spôsobom získame ďalších $(m-2)$ superkonvergentných sumačných pravidiel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} t \cdot \text{Im}F_h(t) dt &= 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} t^2 \cdot \text{Im}F_h(t) dt &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} t^{m-2} \cdot \text{Im}F_h(t) dt &= 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Aproximovaním imaginárnej časti FF δ - funkciou v tvare

$$\text{Im}F(t) = \pi \sum_i^n a_i \delta(t - m_i^2) m_i^2 \quad (51)$$

získame druhú sústavu $(m-1)$ lineárnych homogénnych rovníc pre pomery väzbových konštánt, kde koeficienty sú párne mocniny hmotností vektorových mezónov:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i^2 a_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n m_i^4 a_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n m_i^6 a_i &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^n m_i^{2(m-1)} a_i &= 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Napriek faktu že sústavy rovníc (45) a (52) boli odvodené vychádzajúc z odlišných predpokladov a na prvý pohľad sa zdajú byť rôzne, v ďalšom dokážeme ich ekvivalentnosť. To má za následok možnosť použitia jednoduchšej sústavy rovníc (52) pri konštrukcii unitárneho a analytického modelu elektromagnetickej štruktúry hadrónov v ľubovoľnom všeobecnom prípade.

Ako môžeme vidieť priamym porovnaním systémov (45) a (52), prvá rovnica je identická. Aby sme ukázali ekvivalentnosť ďalších rovníc, sústavu (45) musíme modifikovať. Druhá rovnica v (45) môže byť vyjadrená v tvare

$$(m_2^2 + \dots + m_n^2)m_1^2 a_1 + (m_1^2 + m_3^2 + \dots + m_n^2)m_2^2 a_2 + \dots + (m_1^2 + \dots + m_{n-1}^2)m_n^2 a_n = 0.$$

Pridaním a odčítaním $m_1^4 a_1$ k prvému členu súčtu, $m_2^4 a_2$ k druhému členu súčtu atď. a nakoniec $m_n^4 a_n$ k poslednému členu súčtu, modifikujeme predchádzajúcu rovnicu na tvar

$$\sum_{i=1}^n m_i^2 \sum_{j=1}^n m_j^2 a_j - \sum_{j=1}^n m_j^4 a_j = 0, \quad (53)$$

z ktorého okamžite vidieť, že druhá rovnica v (52),

$$\sum_{j=1}^n m_j^4 a_j = 0,$$

je splnená, pretože $\sum_{j=1}^n m_j^2 a_j = 0$ je práve prvá rovnica v (45) aj (52).

V tretej rovnici systému (45) môže byť použitá tá istá procedúra, rozpísaním členov dostaneme tvar

$$\begin{aligned} & (m_2^2 m_3^2 + \dots + m_2^2 m_n^2 + m_3^2 m_4^2 + \dots + m_3^2 m_n^2 + \dots + m_{n-1}^2 m_n^2) m_1^2 a_1 + \\ & + (m_1^2 m_3^2 + \dots + m_1^2 m_n^2 + m_3^2 m_4^2 + \dots + m_3^2 m_n^2 + \dots + m_{n-1}^2 m_n^2) m_2^2 a_2 + \\ & + (m_1^2 m_2^2 + \dots + m_1^2 m_n^2 + m_2^2 m_4^2 + \dots + m_2^2 m_n^2 + \dots + m_{n-1}^2 m_n^2) m_3^2 a_3 + \\ & \dots \dots \dots \\ & + (m_1^2 m_2^2 + \dots + m_1^2 m_{n-2}^2 + m_1^2 m_n^2 + m_2^2 m_3^2 + \dots + m_2^2 m_{n-2}^2 + \\ & + m_2^2 m_n^2 + \dots + m_{n-2}^2 m_n^2) m_{n-1}^2 a_{n-1} + \\ & + (m_1^2 m_2^2 + \dots + m_1^2 m_{n-1}^2 + m_2^2 m_3^2 + \dots + m_2^2 m_{n-1}^2 + \dots + \\ & + m_{n-2}^2 m_{n-1}^2) m_n^2 a_n = 0. \end{aligned} \quad (54)$$

Pridaním a odčítaním všetkých chýbajúcich členov v (54) od súčtu súm $\sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^n m_{i_1}^2 m_{i_2}^2 \sum_{j=1}^n m_j^2 a_j$, ktoré môžeme zapísať ako

$$\begin{aligned} & (m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + \dots + m_n^2) m_1^4 a_1 + \\ & + (m_1^2 + m_3^2 + m_4^2 + \dots + m_n^2) m_2^4 a_2 + \\ & + (m_1^2 + m_2^2 + m_4^2 + \dots + m_n^2) m_3^4 a_3 + \end{aligned} \quad (55)$$

.....

$$\begin{aligned}
& + (m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_{n-2}^2 + m_n^2)m_{n-1}^4 a_{n-1} + \\
& + (m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_{n-2}^2 + m_{n-1}^2)m_n^4 a_n
\end{aligned}$$

a po odčítaní a pridaní $m_1^6 a_1$ v prvom riadku (55), $m_2^6 a_2$ v druhom atď., a nakoniec $m_n^6 a_n$ v poslednom riadku (55) môžeme rovnicu (54) prepísať do tvaru

$$\sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^n m_{i_1}^2 m_{i_2}^2 \sum_{j=1}^n m_j^2 a_j - \sum_{i=1}^n m_i^2 \sum_{j=1}^n m_j^4 a_j + \sum_{j=1}^n m_j^6 a_j = 0. \quad (56)$$

Z tohto výrazu, berúc do úvahy prvé dve rovnice v (52), automaticky vyplýva tretia rovnica v sústave (52),

$$\sum_j^n m_j^6 a_j = 0.$$

Po modifikovaní rovníc (odčítaniu a pridaní chýbajúcich členov) dostávame

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n m_j^2 a_j = 0 \\
& \sum_{i=1}^n m_i^2 \sum_{j=1}^n m_j^2 a_j - \sum_{j=1}^n m_j^4 a_j = 0 \\
& \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^n m_{i_1}^2 m_{i_2}^2 \sum_{j=1}^n m_j^2 a_j - \sum_{i=1}^n m_i^2 \sum_{j=1}^n m_j^4 a_j + \sum_{j=1}^n m_j^6 a_j = 0 \\
& \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3=1 \\ i_1 < i_2 < i_3}}^n m_{i_1}^2 m_{i_2}^2 m_{i_3}^2 \sum_{j=1}^n m_j^2 a_j - \\
& - \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^n m_{i_1}^2 m_{i_2}^2 \sum_{j=1}^n m_j^4 a_j + \sum_{i=1}^n m_i^2 \sum_{j=1}^n m_j^6 a_j - \sum_{j=1}^n m_j^8 a_j = 0. \\
& \dots\dots\dots
\end{aligned} \quad (57)$$

Teraz už je jednoduché zovšeobecniť horeuvedené procedúry:

- i) q -ta rovnica v (45) môže byť rozložená na q výrazov (pozri (53) a (56)) pozostávajúce z členov s 2 časťami, kde prvá časť je suma klesajúceho počtu členov tvorených kvadrátmi vektorovo-mezónových hmotností, začínajúc $q-1$ koeficientami a končiac konštantou 1. Druhá časť má tvar $\sum_{j=1}^n m_j^\alpha a_j$ s rastúcou párnou mocninou α od 2 po $2q$.
- ii) znamienko pred jednotlivými členmi v dekompozícii sa strieda, avšak prvé je vždy kladné.

Ak predpokladáme ekvivalentnosť $m - 2$ rovníc v (45) a (52), potom, majúc na zreteli zovšeobnenie našej procedúry definované bodmi i) a ii), môžeme rozložiť $(m - 1)$. rovnicu v (45) do nasledujúceho tvaru

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3, \dots, i_{m-2}=1 \\ i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_{m-2}}}^n m_{i_1}^2 m_{i_2}^2 \cdots m_{i_{m-2}}^2 \sum_j^n m_j^2 a_j - \\
& - \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3, \dots, i_{m-3}=1 \\ i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_{m-3}}}^n m_{i_1}^2 m_{i_2}^2 \cdots m_{i_{m-3}}^2 \sum_{j=1}^n m_j^4 a_j + \\
& + \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3, \dots, i_{m-4}=1 \\ i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_{m-4}}}^n m_{i_1}^2 m_{i_2}^2 \cdots m_{i_{m-4}}^2 \sum_j^n m_j^6 a_j + \cdots + \\
& + (-1)^{m-3} \sum_{i=1}^n m_i^2 \sum_{j=1}^n m_j^{2(m-2)} a_j + (-1)^{m-2} \sum_{j=1}^n m_j^{2(m-1)} a_j = 0,
\end{aligned} \tag{58}$$

odkiaľ vidno, že $(m - 1)$ rovnica v (52),

$$\sum_{j=1}^n m_j^{2(m-1)} a_j = 0,$$

je splnená, pretože $\sum_{j=1}^n m_j^2 a_j = 0$, $\sum_{j=1}^n m_j^4 a_j = 0$, \cdots , $\sum_{j=1}^n m_j^{2(m-2)} a_j = 0$ je prvých $(m - 2)$ rovníc (52) ktoré platia na základe nášho predpokladu. Tým je ekvivalencia oboch sústav rovníc pre pomery väzbových konštánt dokázaná.

7 Všeobecné riešenie asymptotických podmienok

V predchádzajúcej kapitole sme odvodili dve odlišné sústavy $(m-1)$ lineárnych homogénnych algebraických rovníc pre pomery väzbových konštánt, vychádza-

júc z rozličných vlastností elektromagnetického formfaktoru $F_h(t)$ silno interagujúcich častíc s asymptotickým správaním $\sim_{|t| \rightarrow \infty} t^{-m}$ ($m \leq n$), kde n je počet vektorových mezónov uvažovaných v rámci VMD modelu.

V tejto časti, s ohľadom na dôkaz ekvivalentnosti oboch sústav, sa budeme zaoberať jednoduchšou z nich, hoci odvodenou podľa nás nesprávnym spôsobom pomocou superkonvergenčných sumačných pravidiel pre funkcie získané vynásobením imaginárnej časti EM FF príslušnými mocninami prenesenej hybnosti, v ktorej koeficienty sú párnymi mocninami hmotností vektorových mezónov. Nájdeme jej všeobecné riešenia [5], vedúce k VMD reprezentácii $F_h(t)$ s požadovanou asymptotikou.

Najprv nájdeme všeobecné riešenia asymptotických podmienok kombinovaných s normou FF, uvažujúc nasýtenie formfaktoru vektorovými mezónmi s počtom väčším než je mocnina určujúca jeho asymptotické správanie.

Ak predpokladáme že EM FF hadrónu možno v dobrom priblížení popísať pomocou konečného počtu n vektorovo- mezónových Feynmanových diagramov, môžeme na opis FF použiť VMD parametrizáciu vyjadrenú vzťahom (22). Ďalej predpokladajme, že EM FF má asymptotické správanie (42) a je normovaný pri $t = 0$ nasledovne:

$$F_h(0) = F_0. \quad (59)$$

Ak požadujeme, aby formfaktor vyjadrený vzťahom (22) spĺňal podmienky (42) a (59), dostaneme nasledovný systém m lineárnych nehomogénnych algebraických rovníc:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i &= F_0 \\ \sum_{i=1}^n m_i^{2r} a_i &= 0, \quad r = 1, 2, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (60)$$

pre n pomerov väzbových konštánt $a_i = (f_{ihh}/f_i)$. Preto budeme hľadať riešenie rovníc (60) pre m neznámych a_1, \dots, a_m a a_{m+1}, \dots, a_n budú voľnými parametrami modelu. Potom môžeme systém (60) napísať v maticovom tvare

$$\mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad (61)$$

s $m \times m$ Vandermondovou maticou \mathbf{M}

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ m_1^2 & m_2^2 & \dots & m_m^2 \\ m_1^4 & m_2^4 & \dots & m_m^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1^{2(m-1)} & m_2^{2(m-1)} & \dots & m_m^{2(m-1)} \end{pmatrix} \quad (62)$$

a stĺpcovými vektormi

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} F_0 - \sum_{k=m+1}^n a_k \\ -\sum_{k=m+1}^n m_k^2 a_k \\ -\sum_{k=m+1}^n m_k^4 a_k \\ \dots \\ -\sum_{k=m+1}^n m_k^{2(m-1)} a_k \end{pmatrix}. \quad (63)$$

Determinant Vandermondovej matice (62) je rôzny od nuly

$$\det \mathbf{M} = \prod_{\substack{j,l=1, \\ j < l}}^m (m_l^2 - m_j^2). \quad (64)$$

To bolo explicitne dokázané redukovaním matice (62) do triangulárneho tvaru, berúc do úvahy fakt, že determinant trojuholníkovej matice je súčinom jej hlavných diagonálnych elementov.

V dôsledku nenulovosti (64) existujú netriviálne riešenia (61). Na ich nájdenie používame Cramerovo pravidlo napriek skutočnosti, že z výpočtového hľadiska pre $m > 3$ neposkytuje žiadne výhody oproti Gausovej eliminačnej metóde. Avšak v našom prípade sú všetky výpočty do určitej miery zredukované na vyrátanie determinantov Vandermondovho typu a preto nebolo problematické nájsť explicitné riešenia.

Odpovedajúce riešenia (61) pre $i = 1, \dots, m$ sú

$$a_i = \frac{\det \mathbf{M}_i}{\det \mathbf{M}}, \quad (65)$$

kde matica \mathbf{M}_i má nasledovný tvar

$$\mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} 1 \dots & 1 & F_0 - \sum_{k=m+1}^n a_k & 1 & \dots & 1 \\ m_1^2 \dots & m_{i-1}^2 & 0 - \sum_{k=m+1}^n m_k^2 a_k & m_{i+1}^2 & \dots & m_m^2 \\ m_1^4 \dots & m_{i-1}^4 & 0 - \sum_{k=m+1}^n m_k^4 a_k & m_{i+1}^4 & \dots & m_m^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1^{2(m-2)} \dots & m_{i-1}^{2(m-2)} & 0 - \sum_{k=m+1}^n m_k^{2(m-2)} a_k & m_{i+1}^{2(m-2)} & \dots & m_m^{2(m-2)} \\ m_1^{2(m-1)} \dots & m_{i-1}^{2(m-1)} & 0 - \sum_{k=m+1}^n m_k^{2(m-1)} a_k & m_{i+1}^{2(m-1)} & \dots & m_m^{2(m-1)} \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Pretože determinant je aditívnou funkciou každého stĺpca, pre každý skalár C platí $\det(B_1, \dots, C B_i, \dots, B_n) = C \det(B_1, \dots, B_i, \dots, B_n)$ a $\det(B_1, \dots, B_{i-1}, \sum_k a_k B_k, B_{i+1}, \dots, B_n) = \sum_k a_k \det(B_1, \dots, B_{i-1}, B_k, B_{i+1}, \dots, B_n)$.

Teda pre determinant matice \mathbf{M}_i môžeme použiť dekompozíciu

$$\begin{aligned}
 \det \mathbf{M}_i = & \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & F_0 & \dots & 1 \\ m_1^2 & m_2^2 & \dots & 0 & \dots & m_m^2 \\ m_1^4 & m_2^4 & \dots & 0 & \dots & m_m^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1^{2(m-2)} & m_2^{2(m-2)} & \dots & 0 & \dots & m_m^{2(m-2)} \\ m_1^{2(m-1)} & m_2^{2(m-1)} & \dots & 0 & \dots & m_m^{2(m-1)} \end{vmatrix} \\
 - \sum_{k=m+1}^n a_k & \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ m_1^2 & m_2^2 & \dots & m_k^2 & \dots & m_m^2 \\ m_1^4 & m_2^4 & \dots & m_k^4 & \dots & m_m^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1^{2(m-2)} & m_2^{2(m-2)} & \dots & m_k^{2(m-2)} & \dots & m_m^{2(m-2)} \\ m_1^{2(m-1)} & m_2^{2(m-1)} & \dots & m_k^{2(m-1)} & \dots & m_m^{2(m-1)} \end{vmatrix},
 \end{aligned} \tag{67}$$

odkiaľ, ak v prvom determinante použijeme Laplaceov rozklad podľa členov stĺpca i , dostaneme explicitný tvar

$$\begin{aligned}
 \det \mathbf{M}_i = & F_0 (-1)^{1+i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m m_j^2 \prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l, j, l \neq i}}^m (m_l^2 - m_j^2) - \\
 & (-1)^{i-1} \prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l, j, l \neq i}}^m (m_l^2 - m_j^2) \sum_{k=m+1}^n a_k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (m_j^2 - m_k^2).
 \end{aligned} \tag{68}$$

Dosadením (64) a (68) do (65) dostaneme riešenia (61) v tvare

$$\begin{aligned}
 a_i = & \frac{F_0 (-1)^{1+i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m m_j^2 \prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l, j, l \neq i}}^m (m_l^2 - m_j^2)}{\prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^m (m_l^2 - m_j^2)} - \\
 & \frac{(-1)^{i-1} \prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l, j, l \neq i}}^m (m_l^2 - m_j^2) \sum_{k=m+1}^n a_k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (m_j^2 - m_k^2)}{\prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^m (m_l^2 - m_j^2)}.
 \end{aligned} \tag{69}$$

Keď chceme pomocou vzťahu (69) nájsť, explicitný tvar $F_h(t)$, ktorý by bol automaticky normovaný a mal požadované asymptotické správanie, potrebujeme sumu vo VMD modeli (22) rozdeliť na dve časti a následne

prvú transformovať na spoločného menovateľa

$$\begin{aligned}
F_h(t) &= \sum_{i=1}^m \frac{m_i^2 a_i}{m_i^2 - t} + \sum_{k=m+1}^n \frac{m_k^2 a_k}{m_k^2 - t} = \\
&= \frac{\sum_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (m_j^2 - t) m_i^2 a_i}{\prod_{j=1}^m (m_j^2 - t)} + \sum_{k=m+1}^n \frac{m_k^2 a_k}{m_k^2 - t}.
\end{aligned} \tag{70}$$

Potom (69) spolu so (70) dáva nasledovné vyjadrenie formfaktora

$$\begin{aligned}
F_h(t) &= F_0 \frac{\sum_{i=1}^m (-1)^{1+i} m_i^2 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m m_j^2 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (m_j^2 - t) \prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l, j, l \neq i}}^m (m_l^2 - m_j^2)}{\prod_{j=1}^m (m_j^2 - t) \prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^m (m_l^2 - m_j^2)} - \\
&- \frac{\sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} m_i^2 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (m_j^2 - t) \prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l, j, l \neq i}}^m (m_l^2 - m_j^2) \sum_{k=m+1}^n a_k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (m_j^2 - m_k^2)}{\prod_{j=1}^m (m_j^2 - t) \prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^m (m_l^2 - m_j^2)} + \\
&+ \sum_{k=m+1}^n \frac{m_k^2 a_k}{m_k^2 - t}.
\end{aligned} \tag{71}$$

Prvý člen v (71) môžeme upraviť do tvaru

$$F_0 \frac{\prod_{j=1}^m m_j^2}{\prod_{j=1}^m (m_j^2 - t)} \frac{\sum_{i=1}^m (-1)^{1+i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (m_j^2 - t) \prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l, j, l \neq i}}^m (m_l^2 - m_j^2)}{\prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^m (m_l^2 - m_j^2)}, \tag{72}$$

v ktorom sa dá explicitne dokázať identita

$$\sum_{i=1}^m (-1)^{1+i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (m_j^2 - t) \prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l, j, l \neq i}}^m (m_l^2 - m_j^2) \equiv \prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^m (m_l^2 - m_j^2) \tag{73}$$

vedúca k značnému zjednodušeniu príslušného člena na

$$F_0 \frac{\prod_{j=1}^m m_j^2}{\prod_{j=1}^m (m_j^2 - t)}. \tag{74}$$

Vzťah (73) možno dokázať prepísaním ľavej strany do nasledujúceho tvaru

$$\sum_{i=1}^m (-1)^{1+i} \times \begin{vmatrix} (m_1^2 - t) \dots & (m_{i-1}^2 - t) & (m_{i+1}^2 - t) \dots & (m_m^2 - t) \\ m_1^2(m_1^2 - t) \dots & m_{i-1}^2(m_{i-1}^2 - t) & m_{i+1}^2(m_{i+1}^2 - t) \dots & m_m^2(m_m^2 - t) \\ m_1^4(m_1^2 - t) \dots & m_{i-1}^4(m_{i-1}^2 - t) & m_{i+1}^4(m_{i+1}^2 - t) \dots & m_m^4(m_m^2 - t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1^{2(m-3)}(m_1^2 - t) \dots & m_{i-1}^{2(m-3)}(m_{i-1}^2 - t) & m_{i+1}^{2(m-3)}(m_{i+1}^2 - t) \dots & m_m^{2(m-3)}(m_m^2 - t) \\ m_1^{2(m-2)}(m_1^2 - t) \dots & m_{i-1}^{2(m-2)}(m_{i-1}^2 - t) & m_{i+1}^{2(m-2)}(m_{i+1}^2 - t) \dots & m_m^{2(m-2)}(m_m^2 - t) \end{vmatrix} \quad (75)$$

a potom rozložením determinantu do sumy viacerých determinantov toho istého rádu a následnými explicitnými výpočtami. Pretože táto procedúra nie je z výpočtového hľadiska jednoduchá a s cieľom dokázania vzťahu (73) definujeme novú maticu

$$\mathbf{D}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \dots & 1 & \dots & 1 \\ (m_1^2 - t) & (m_2^2 - t) \dots & (m_i^2 - t) & \dots & (m_m^2 - t) \\ (m_1^2 - t)^2 & (m_2^2 - t)^2 \dots & (m_i^2 - t)^2 & \dots & (m_m^2 - t)^2 \\ (m_1^2 - t)^3 & (m_2^2 - t)^3 \dots & (m_i^2 - t)^3 & \dots & (m_m^2 - t)^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (m_1^2 - t)^{m-2} & (m_2^2 - t)^{m-2} \dots & (m_i^2 - t)^{m-2} & \dots & (m_m^2 - t)^{m-2} \\ (m_1^2 - t)^{m-1} & (m_2^2 - t)^{m-1} \dots & (m_i^2 - t)^{m-1} & \dots & (m_m^2 - t)^{m-1} \end{pmatrix}. \quad (76)$$

Priradením $(m_i^2 - t) = x_i$ dostaneme Vandermondovu maticu

$$\mathbf{D}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \dots & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 \dots & x_i & \dots & x_m \\ x_1^2 & x_2^2 \dots & x_i^2 & \dots & x_m^2 \\ x_1^3 & x_2^3 \dots & x_i^3 & \dots & x_m^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{m-2} & x_2^{m-2} \dots & x_i^{m-2} & \dots & x_m^{m-2} \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} \dots & x_i^{m-1} & \dots & x_m^{m-1} \end{pmatrix}, \quad (77)$$

determinant ktorej je presne rovný pravej strane (73)

$$\det \mathbf{D}(\mathbf{t}) = \prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^m (x_l - x_j) \equiv \prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^m (m_l^2 - t - m_j^2 + t) = \prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^m (m_l^2 - m_j^2). \quad (78)$$

Ak v determinante matice (76) použijeme Laplaceov rozvoj podľa členov prvého riadku a následne vyjmeme spoločné faktory vo všetkých stĺpcoch

subdeterminantov, dostaneme vyjadrenie

$$\det \mathbf{D}(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^m (-1)^{1+i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (m_j^2 - t) \times \quad (79)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \dots & 1 \\ (m_1^2 - t) & \dots & (m_{i-1}^2 - t) & (m_{i+1}^2 - t) \dots & (m_m^2 - t) \\ (m_1^2 - t)^2 & \dots & (m_{i-1}^2 - t)^2 & (m_{i+1}^2 - t)^2 \dots & (m_m^2 - t)^2 \\ (m_1^2 - t)^3 & \dots & (m_{i-1}^2 - t)^3 & (m_{i+1}^2 - t)^3 \dots & (m_m^2 - t)^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (m_1^2 - t)^{m-3} & \dots & (m_{i-1}^2 - t)^{m-3} & (m_{i+1}^2 - t)^{m-3} \dots & (m_m^2 - t)^{m-3} \\ (m_1^2 - t)^{m-2} & \dots & (m_{i-1}^2 - t)^{m-2} & (m_{i+1}^2 - t)^{m-2} \dots & (m_m^2 - t)^{m-2} \end{vmatrix}.$$

Potom explicitným vyrátaním determinantu v (79) a použitím označenia $x_k = (m_k^2 - t)$ pre $k = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m$, nakoniec dostaneme

$$\det \mathbf{D}(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^m (-1)^{1+i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (m_j^2 - t) \prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l, j,l \neq i}}^m (m_l^2 - m_j^2), \quad (80)$$

čo je ľavá strana (73). Tým je dokázaná platnosť identity.

Druhý a tretí člen v (71), po úprave na spoločného menovateľa, môžeme spojiť do nasledovného výrazu:

$$\sum_{k=m+1}^n \left\{ \frac{m_k^2 \prod_{j=1}^m (m_j^2 - t) \prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^m (m_l^2 - m_j^2)}{(m_k^2 - t) \prod_{j=1}^m (m_j^2 - t) \prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^m (m_l^2 - m_j^2)} + \right. \quad (81)$$

$$\left. + \frac{(m_k^2 - t) \sum_{i=1}^m (-1)^i m_i^2 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (m_j^2 - m_k^2) \prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l, j,l \neq i}}^m (m_l^2 - m_j^2) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (m_j^2 - t)}{(m_k^2 - t) \prod_{j=1}^m (m_j^2 - t) \prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^m (m_l^2 - m_j^2)} \right\} a_k,$$

ktorého čitateľ je práve Laplaceovým rozvojom podľa členov prvého riadku matice rádu $(m+1)$

$$\mathbf{N}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} m_k^2 & m_1^2 & \dots & m_m^2 \\ (m_k^2 - t) & (m_1^2 - t) & \dots & (m_m^2 - t) \\ (m_k^2 - t)^2 & (m_1^2 - t)^2 & \dots & (m_m^2 - t)^2 \\ (m_k^2 - t)^3 & (m_1^2 - t)^3 & \dots & (m_m^2 - t)^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (m_k^2 - t)^{m-1} & (m_1^2 - t)^{m-1} & \dots & (m_m^2 - t)^{m-1} \\ (m_k^2 - t)^m & (m_1^2 - t)^m & \dots & (m_m^2 - t)^m \end{pmatrix}. \quad (82)$$

Ak definujeme novú maticu rádu $(m + 1)$

$$\mathbf{R}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ (m_k^2 - t) & (m_1^2 - t) & \dots & (m_m^2 - t) \\ (m_k^2 - t)^2 & (m_1^2 - t)^2 & \dots & (m_m^2 - t)^2 \\ (m_k^2 - t)^3 & (m_1^2 - t)^3 & \dots & (m_m^2 - t)^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (m_k^2 - t)^{m-1} & (m_1^2 - t)^{m-1} & \dots & (m_m^2 - t)^{m-1} \\ (m_k^2 - t)^m & (m_1^2 - t)^m & \dots & (m_m^2 - t)^m \end{pmatrix}, \quad (83)$$

potom determinanty oboch matíc, (82) a (83), spĺňajú rovnicu

$$\det \mathbf{N}(\mathbf{t}) - t \cdot \det \mathbf{R}(\mathbf{t}) \equiv \det \mathbf{S}(\mathbf{t}) = 0 \quad (84)$$

za predpokladu, že $\det \mathbf{S}(\mathbf{t})$ získame násobením prvého riadku $\mathbf{R}(\mathbf{t})$ s t a odčítaním výsledného determinantu od $\mathbf{N}(\mathbf{t})$.

Tak isto platí vzťah

$$\det \mathbf{N}(\mathbf{0}) = 0, \quad (85)$$

pretože v $\mathbf{N}(\mathbf{0})$ (a tiež v $\mathbf{S}(\mathbf{t})$) prvé dva riadky sú identické.

Kvôli vhodnej úprave čitateľa vo vzťahu (81) píšeme $\det \mathbf{N}(\mathbf{t})$ v tvare

$$\det \mathbf{N}(\mathbf{t}) = t \cdot \det \mathbf{R}(\mathbf{0}) - \det \mathbf{N}(\mathbf{0}), \quad (86)$$

berúc do úvahy (84), (85) a identitu

$$\det \mathbf{R}(\mathbf{t}) \equiv \det \mathbf{R}(\mathbf{0}). \quad (87)$$

V (86) použijeme pre determinanty matíc $\mathbf{R}(\mathbf{0})$ a $\mathbf{N}(\mathbf{0})$ Laplaceov rozvoj podľa členov prvého riadku. Ako výsledok dostaneme

$$\det \mathbf{N}(\mathbf{t}) = t \cdot \begin{vmatrix} m_1^2 & m_2^2 & \dots & m_m^2 \\ m_1^4 & m_2^4 & \dots & m_m^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1^{2(m-1)} & m_2^{2(m-1)} & \dots & m_m^{2(m-1)} \\ m_1^{2m} & m_2^{2m} & \dots & m_m^{2m} \end{vmatrix} + \quad (88)$$

$$+ \sum_{i=1}^m (-1)^i t \begin{vmatrix} m_k^2 & m_1^2 \dots & m_{i-1}^2 & m_{i+1}^2 & \dots & m_m^2 \\ m_k^4 & m_1^4 \dots & m_{i-1}^4 & m_{i+1}^4 & \dots & m_m^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_k^{2(m-1)} & m_1^{2(m-1)} \dots & m_{i-1}^{2(m-1)} & m_{i+1}^{2(m-1)} & \dots & m_m^{2(m-1)} \\ m_k^{2m} & m_1^{2m} \dots & m_{i-1}^{2m} & m_{i+1}^{2m} & \dots & m_m^{2m} \end{vmatrix} -$$

$$\begin{aligned}
& - m_k^2 \begin{vmatrix} m_1^2 & m_2^2 & \dots & m_m^2 \\ m_1^4 & m_2^4 & \dots & m_m^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1^{2(m-1)} & m_2^{2(m-1)} & \dots & m_m^{2(m-1)} \\ m_1^{2m} & m_2^{2m} & \dots & m_m^{2m} \end{vmatrix} - \\
& - \sum_{i=1}^m (-1)^i m_i^2 \begin{vmatrix} m_k^2 & m_1^2 \dots & m_{i-1}^2 & m_{i+1}^2 & \dots & m_m^2 \\ m_k^4 & m_1^4 \dots & m_{i-1}^4 & m_{i+1}^4 & \dots & m_m^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_k^{2(m-1)} & m_1^{2(m-1)} \dots & m_{i-1}^{2(m-1)} & m_{i+1}^{2(m-1)} & \dots & m_m^{2(m-1)} \\ m_k^{2m} & m_1^{2m} \dots & m_{i-1}^{2m} & m_{i+1}^{2m} & \dots & m_m^{2m} \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

alebo explicitným výpočtom odpovedajúcich subdeterminantov

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{N}(\mathbf{t}) &= (t - m_k^2) \prod_{j=1}^m m_j^2 \prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^m (m_l^2 - m_j^2) + \\
&+ \sum_{i=1}^m (-1)^i (t - m_i^2) m_k^2 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m m_j^2 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (m_j^2 - m_k^2) \prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l, j, l \neq i}}^m (m_l^2 - m_j^2).
\end{aligned} \tag{89}$$

Po dosadení posledného vzťahu do (81) obdržíme

$$\sum_{k=m+1}^n \left\{ - \frac{\prod_{j=1}^m m_j^2}{\prod_{j=1}^m (m_j^2 - t)} + \sum_{i=1}^m \frac{m_k^2}{(m_k^2 - t)} \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m m_j^2}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (m_j^2 - t)} \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (m_j^2 - m_k^2)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (m_j^2 - m_i^2)} \right\} a_k \tag{90}$$

a v kombinácii výsledku s (74) dostaneme formfaktor $F_h(t)$ nasýtený n vektorovými mezónmi ($n > m$) v tvare

$$\begin{aligned}
F_h(t) &= F_0 \frac{\prod_{j=1}^m m_j^2}{\prod_{j=1}^m (m_j^2 - t)} + \\
&+ \sum_{k=m+1}^n \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{m_k^2}{(m_k^2 - t)} \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m m_j^2}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (m_j^2 - t)} \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (m_j^2 - m_k^2)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (m_j^2 - m_i^2)} - \frac{\prod_{j=1}^m m_j^2}{\prod_{j=1}^m (m_j^2 - t)} \right\} a_k,
\end{aligned} \tag{91}$$

pre ktorý asymptotické správanie (42) a normalizácia (59) pri $t = 0$ sú automaticky splnené.

Asymptotické správanie v (91) je zřejmé. Aby bola splnená norma (59) mala by platiť v druhom člene výrazu (91) nasledovná identita

$$\sum_{i=1}^m \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (m_j^2 - m_k^2)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (m_j^2 - m_i^2)} = 1 \tag{92}$$

Pre $m = 2, 3, 4, 5$ to môžeme dokázať explicitne a pre ľubovoľné konečné m to vyplýva priamo z (81), kde čitateľ je Laplaceovým rozvojom podľa členov prvého riadku matice (82). Potom vzťah (85) vedie k nulovosti (81) a (90) pri $t = 0$ pre ľubovoľné nenulové hodnoty a_k . Preto každý člen v zátvorke (90) pre $t = 0$ je rovný nule a to platí vtedy a len vtedy ak identita (92) je splnená.

Teraz uvažujme prípad rovníc (60) pre $n = m$. Tieto tak isto môžeme napísať pomocou Vandermondovej matice $m \times m$ (62) s rovnakým vektorom \mathbf{a} , ale s vektorom \mathbf{b} v nasledovnom tvare

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (93)$$

Odpovedajúce riešenia hľadáme znova v tvare

$$a_i = \frac{\det \mathbf{M}_i}{\det \mathbf{M}},$$

ale s maticou \mathbf{M}_i

$$\mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & F_0 & 1 & \dots & 1 \\ m_1^2 & \dots & m_{i-1}^2 & 0 & m_{i+1}^2 & \dots & m_m^2 \\ m_1^4 & \dots & m_{i-1}^4 & 0 & m_{i+1}^4 & \dots & m_m^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1^{2(m-2)} & \dots & m_{i-1}^{2(m-2)} & 0 & m_{i+1}^{2(m-2)} & \dots & m_m^{2(m-2)} \\ m_1^{2(m-1)} & \dots & m_{i-1}^{2(m-1)} & 0 & m_{i+1}^{2(m-1)} & \dots & m_m^{2(m-1)} \end{pmatrix}, \quad (94)$$

a determinantom

$$\det \mathbf{M}_i = F_0 (-1)^{1+i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m m_j^2 \prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l, j, l \neq i}}^m (m_l^2 - m_j^2). \quad (95)$$

Riešenia

$$\begin{aligned} a_i &= F_0 \frac{(-1)^{1+i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m m_j^2 \prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l, j, l \neq i}}^m (m_l^2 - m_j^2)}{\prod_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^m (m_l^2 - m_j^2)} = \\ &= F_0 \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m m_j^2 (-1)^{1+i}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (m_j^2 - m_i^2) (-1)^{i-1}} \end{aligned} \quad (96)$$

sú úplne vyjadrené pomocou hmotností m vektorových mezónov, ktorými je FF nasýtený. Formfaktor má potom nasledujúci tvar

$$F_h(t) = F_0 \frac{\prod_{j=1}^m m_j^2}{\prod_{j=1}^m (m_j^2 - t)}. \quad (97)$$

8 Elektromagnetické prechodové formfaktory hadrónov

Pod prechodovým EM FF všeobecne rozumieme taký trojčasticový vrchol s virtuálnym fotónom a aspoň jedným hadrónom, kde reálne dve častice sú rôzne. Ak jedna z týchto častíc je reálny fotón, potom hovoríme o prechodovom EM FF ostávajúceho hadrónu.

8.1 Súčasné popísanie údajov prechodového formfaktoru $\phi\eta$ v priestorupodobnej aj časupodobnej oblasti v rámci unitárneho a analytického modelu

Prechodový formfaktor $\phi\eta$ je definovaný ako parametrizácia EM toku cez spinový parameter ε^ν a štvorhybnosti P^ρ a k^σ mezónov ϕ a η

$$\langle \phi(P)\eta(k) | J_\mu^{em} | 0 \rangle = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^\nu P^\rho k^\sigma \cdot F_{\phi\eta}(s) \quad (98)$$

a totálny účinný prierez e^+e^- anihilácie na $\phi\eta$ je vyjadrený cez formfaktor $F_{\phi\eta}$ nasledujúcim spôsobom

$$\sigma(s) = \frac{\pi\alpha^2}{6s^3} (s + 2m_e^2) \left[\frac{[(s + m_\phi^2 - m_\eta^2)^2 - 4m_\phi^2 s]^3}{s(s - 4m_e^2)} \right]^{1/2} |F_{\phi\eta}|^2. \quad (99)$$

Z predchádzajúcej formuly vidno, že FF $F_{\phi\eta}$ má rozmernosť GeV^{-1} . Je ale výhodné používať normovaný FF

$$f_{\phi\eta}(q^2) = F_{\phi\eta}(q^2)/F_{\phi\eta}(0). \quad (100)$$

Na medzinárodnej konferencii Hadron Structure '04 Baldini prezentoval [6] nové experimentálne údaje o normovanom prechodovom FF (ďalej pFF) $f_{\phi\eta}$

v oblastiach $2m_e^2 < s < (m_\phi - m_\eta)^2$ z leptónového rozpadu ϕ mezónu na η a elektrón-pozitrónový pár [8], $s > (m_\phi + m_\eta)^2$ pochádzajúce z anihilácie elektrón-pozitrónového páru na ϕ a η v BaBar experimente [6] a normovací bod [7] z radiačného rozpadu ϕ na η a γ . Tieto údaje mu umožnili predpovedať správanie $|f_{\phi\eta}(Q^2)|$ v nefyzikálnej oblasti $(m_\phi - m_\eta)^2 < q^2 < (m_\phi + m_\eta)^2$, a tiež fázu tohto prechodového FF použitím logaritmického disperzného vzťahu

$$\ln f_{\phi\eta}(q^2) = \frac{\sqrt{s_0 - q^2}}{\pi} Pr \int_{s_0}^{\infty} \frac{\ln |f_{\phi\eta}(s)|}{(s - q^2)\sqrt{s - s_0}} ds, \quad (101)$$

s $q^2 < s_0$ a

$$\delta(s) = -\frac{\sqrt{s - s_0}}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\ln |f_{\phi\eta}(s')|}{(s' - s)\sqrt{s' - s_0}} ds', \quad (102)$$

s $s \geq s_0$, kde s_0 je najnižší bod vetvenia $f_{\phi\eta}(q^2)$ na kladnej časti reálnej osi komplexnej s -roviny.

V najideálnejšom prípade je výsledkom Baldiniho práce určenie dominantného príspevku mezónu $\phi(1020)$ a príspevku rezonancie $\phi'(1635)$.

Naším cieľom je súčasné popísanie existujúcich experimentálnych údajov [9], t.j. normovacej hodnoty $DA\Phi NE$ [7], údajov z VEPP-2M [8] a detekčného zariadenia BaBar [6], pomocou rozmerného FF $F_{\phi\eta}(q^2)$, konštruovaného v rámci unitárneho a analytického prístupu, a následné porovnanie našich predpovedí v nefyzikálnej oblasti s výsledkami Baldiniho.

Keďže v konečnom stave procesu $e^+e^- \rightarrow \phi\eta$ sú obidve častice izoskaláry, prechodový formfaktor $F_{\phi\eta}(q^2)$ je čistý izoskalár a môže byť teda v rámci VMD parametrizácie nasycovaný iba známymi [10] izoskalárnymi vektorovými rezonanciami $\omega(782)$, $\phi(1020)$, $\omega'(1420)$, $\omega''(1650)$ a $\phi'(1680)$ s kvantovými číslami fotónu.

Potom všeobecne pre $F_{\phi\eta}(q^2)$ môžeme písať vzťah

$$F_{\phi\eta}(t) = \left(\frac{m_\omega^2}{m_\omega^2 - t} a_\omega + \frac{m_\phi^2}{m_\phi^2 - t} a_\phi + \frac{m_{\omega'}^2}{m_{\omega'}^2 - t} a_{\omega'} + \frac{m_{\phi'}^2}{m_{\phi'}^2 - t} a_{\phi'} \right), \quad (103)$$

kde sme nevzali do úvahy $\omega''(1650)$, keďže má hmotnosť nachádzajúcu sa v blízkosti $\phi'(1680)$, $t = q^2$ a $a_s = f_{s\phi\eta}/f_s$. V ďalšom porovnanie Unitárneho a Analytického (UA) modelu s existujúcimi údajmi potvrdzuje opodstatnenosť zanedbania príspevku $\omega''(1650)$.

Ak zabudujeme do (103) normu FF $F_{\phi\eta}(0)$, môžeme $a_{\phi'}$ vyjadriť cez zvyšné pomery väzbových konštánt a dostaneme VMD model automaticky normovaný a s redukovaným počtom voľných parametrov.

Našou úlohou je zabudovanie analytických vlastností $F_{\phi\eta}(t)$, ktoré sú určené v komplexnej rovine t rezom počnúc najnižším bodom vetvenia $t_0 = 9m_\pi^2$ a končiac v $+\infty$, do vzťahu (103). Za tým účelom využijeme nelineárnu transformáciu

$$t = t_0 - 4 \frac{t_{in}^s - t_0}{(1/U - U)^2}, \quad (104)$$

kde t_{in}^s je druhý bod vetvenia, efektívne aproximujúci príspevky všetkých vyšších prahov nad $t_0 = 9m_\pi^2$ do nekonečna, a je voľným parametrom modelu.

Použitie (104) spolu so vzťahmi z neho vyplývajúcich (pre $t = 0$ a $t = m_s^2$)

$$0 = t_0 - 4 \frac{t_{in}^s - t_0}{(1/U_N - U_N)^2} \quad a \quad m_s^2 = t_0 - 4 \frac{t_{in}^s - t_0}{(1/U_{s0} - U_{s0})^2} \quad (105)$$

kde U_N je normovací bod odpovedajúci $t = 0$ v transformovanej U -rovine a U_{s0} je poloha pólov vo vzťahu (103) v U -rovine, dostávame pre každý pólový člen v (103) faktorizovaný tvar

$$\frac{m_s^2}{m_s^2 - t} = \left(\frac{1 - U^2}{1 - U_N^2} \right)^2 \frac{(U_N - U_{s0})(U_N + U_{s0})(U_N - 1/U_{s0})(U_N + 1/U_{s0})}{(U - U_{s0})(U + U_{s0})(U - 1/U_{s0})(U + 1/U_{s0})}. \quad (106)$$

Index 0 značí, že pre vektorové mezóny zatiaľ uvažujeme $\Gamma_s = 0$.

Prvý, tzv. asymptotický člen $[(1 - U^2)/(1 - U_N^2)]^2$ nezávisí od druhu vektorových mezónov a zaručuje asymptotiku VMD modelu (103) (čiže $F_{\phi\eta}(q^2) \sim t^{-1}$ pre $t \rightarrow +\infty$). Druhá časť výrazu, tzv. rezonančný člen, opisuje rezonančné správanie $F_{\phi\eta}(t)$ a pre $|t| \rightarrow +\infty$ prechádza na reálnu konštantu a neprispieva do asymptotického správania VMD modelu.

Vo vyjadrení (106) možno použiť identity

$$\begin{aligned} U_{m0} &= -U_{m0}^* \\ U_{n0} &= 1/U_{n0}^*, \end{aligned} \quad (107)$$

platné pre vektorové mezóny m (s píkom *medzi* prahmi t_0 a t_{in}^s) a n (s píkom *nad* oboma prahmi) spĺňajúce nerovnice

$$\begin{aligned} (m_m^2 - \Gamma_m^2/4) &< t_{in}^s \\ (m_n^2 - \Gamma_n^2/4) &> t_{in}^s \end{aligned} \quad (108)$$

odpovedajúc.

Ak následne zabudujeme aj šírky rezonancií pomocou substitúcie $m_s^2 \rightarrow (m_s - \frac{i\Gamma_s}{2})^2$, napokon dostávame UA model pFF $F_{\phi\eta}(t)$ v tvare

$$F_{\phi\eta}[U(t)] = \left(\frac{1 - U^2}{1 - U_N^2} \right)^2 \left(\sum_m D_m(U_m) a_m + \sum_n H_n(U_n) a_n \right) \quad (109)$$

kde

$$D(U_m) = \frac{(U_N - U_m)(U_N - U_m^*)(U_N - 1/U_m)(U_N - 1/U_m^*)}{(U - U_m)(U - U_m^*)(U - 1/U_m)(U - 1/U_m^*)} \quad (110)$$

sú tzv. "dolné" rezonančné členy izoskalárnych vektorových mezónov (pozri výraz (106)), ktoré sa nachádzajú *medzi* prahmi t_0 a t_{in}^s a

$$H(U_n) = \frac{(U_N - U_n)(U_N - U_n^*)(U_N + U_n)(U_N + U_n^*)}{(U - U_n)(U - U_n^*)(U + U_n)(U + U_n^*)} \quad (111)$$

sú "horné" rezonančné členy izoskalárnych vektorových mezónov *nad* prahom t_{in}^s , pričom $U_N = U(t)|_{t=0}$ a voľné parametre modelu sú t_{in}^s a rozmerné a_s .

$U(t)$ je konformné zobrazenie štvorlistovej Riemannovej plochy premennej q^2 do roviny U

$$U(t) = i \frac{\sqrt{q_{in}^s + q(t)} - \sqrt{q_{in}^s - q(t)}}{\sqrt{q_{in}^s + q(t)} + \sqrt{q_{in}^s - q(t)}} \quad (112)$$

pričom $q(t) = [(t - t_0)/t_0]^{1/2}$ a $q_{in}^s = [(t_{in}^s - t_0)/t_0]^{1/2}$.

Keďže U_N je hodnota $U(t)$ v $t = 0$ a $q(0) = i$, po úprave (vynásobením čitateľa a menovateľa čitateľom) dostávame vzťah

$$U_N = q_{in}^s - \sqrt{(q_{in}^s)^2 + 1}.$$

Pre pozície vektorovo-mezónových pólov U_m a U_n v rovine U v (109) platí

$$U_m = i \frac{\sqrt{q_{in}^s + q_m} - \sqrt{q_{in}^s - q_m}}{\sqrt{q_{in}^s + q_m} + \sqrt{q_{in}^s - q_m}}$$

a

$$U_n = i \frac{\sqrt{q_{in}^s + q_n} + \sqrt{q_{in}^s - q_n}}{\sqrt{q_{in}^s + q_n} - \sqrt{q_{in}^s - q_n}},$$

kde $q_m = [(m_m - i\frac{\Gamma_m}{2})^2 - t_0]^{1/2}$

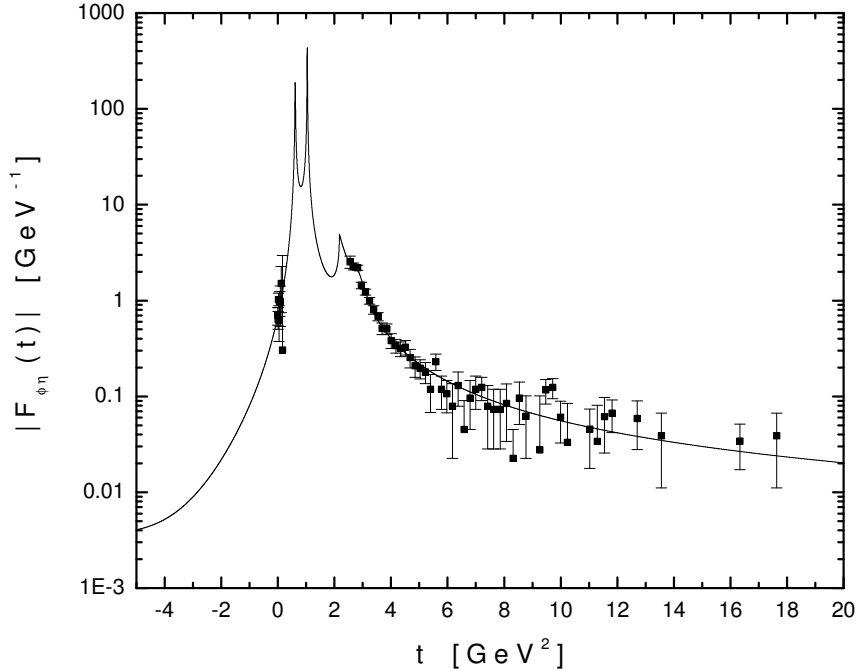
$q_n = [(m_n - i\frac{\Gamma_n}{2})^2 - t_0]^{1/2}$ a $m = \omega, \phi$ a $n = \omega', \phi'$.

V ďalšom porovnáme vzťah (109) s existujúcimi 56-imi experimentálnymi údajmi [6]-[8] a použijúc CERN program MINUIT určíme hodnoty pomerov rozmerných väzbových konštánt $a_s = f_{s\phi\eta}/f_s$. Predtým ale všetky údaje vynásobíme hodnotou

$$F_{\phi\eta}(0) = \left(\frac{2m_\phi}{m_\phi^2 - m_\eta^2} \right) \sqrt{\frac{6m_\phi\Gamma(\phi \rightarrow \eta\gamma)}{\alpha(m_\phi^2 - m_\eta^2)}} = 0.689674 \quad [GeV^{-1}], \quad (113)$$

ktorú sme určili pomocou tabuľkovej hodnoty [10] rozpadovej šírky $\Gamma(\phi \rightarrow \eta\gamma)$

Ak sa obmedzíme na UA model (109) iba s prvými dvoma, alebo troma rezonanciami, t.j. $\omega(782)$, $\phi(1020)$ alebo $\omega(782)$, $\phi(1020)$, $\omega'(1420)$, výsledok jasne poukazuje na nedostatočný popis existujúcich experimentálnych údajov.

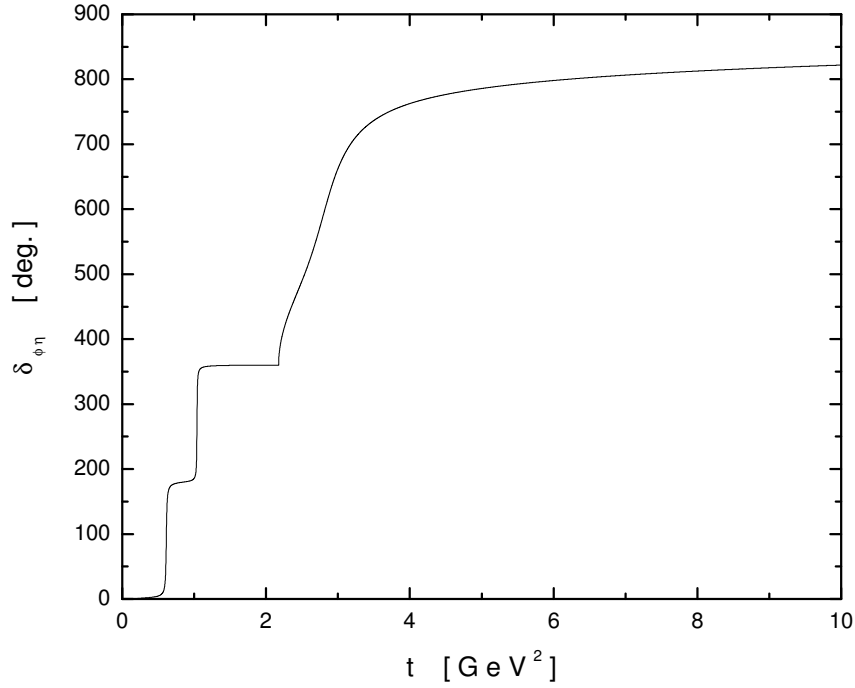


Obrázok 5: Správanie prechodového FF $|F_{\phi\eta}(t)|$ predpovedaného UA modelom

Poslednou zostávajúcou variantou v (109) je kombinácia $\omega(782)$, $\phi(1020)$, $\omega'(1420)$ a $\phi'(1680)$. Dosiahnutý $\chi^2 = 37.7$ jasne poukazuje na vhodný počet rezonancií s nasledujúcimi parametrami

$$t_s = 2.1754 \pm 0.0320 \text{ GeV}^2$$

$$\begin{aligned} (f_{\omega\phi\eta}/f_{\omega}) &= +2.3441 \pm 0.1083 \text{ [GeV}^{-1}\text{]} \\ (f_{\phi\phi\eta}/f_{\phi}) &= -1.8006 \pm 0.0108 \text{ [GeV}^{-1}\text{]} \\ (f_{\omega'\phi\eta}/f_{\omega'}) &= +0.4225 \pm 0.0146 \text{ [GeV}^{-1}\text{]}, \end{aligned} \quad (114)$$



Obrázok 6: Fáza $\delta_{\phi\eta}(t)$ prechodového FF $F_{\phi\eta}(t)$, v stupňoch

kde rozmernosť pomerov väzbových konštant [GeV^{-1}] je definovaná rozmernosťou $F_{\phi\eta}(t)$.

Porovnanie správania sa FF $F_{\phi\eta}(t)$ predpovedaného UA modelom (109) s existujúcimi experimentálnymi údajmi a jeho fáza sú zobrazené na obr.5 a obr.6.

Číselné hodnoty pomerov väzbových konštant ($f_{\omega\phi\eta}/f_{\omega}$) a ($f_{\phi\phi\eta}/f_{\phi}$) indikujú menej výrazný príspevok $\omega'(1420)$ k správaniu sa $F_{\phi\eta}(t)$ v porovnaní s príspevkom $\omega(782)$ a $\phi(1020)$. Potvrdzujeme ale Baldiniho výsledok dominantného príspevku $\phi(1020)$ mezónu.

Fáza $\delta_{\phi\eta} = \arctan(\text{Im } F_{\phi\eta}/\text{Re } F_{\phi\eta})$ prechodového FF $F_{\phi\eta}(t)$ (pozri obr.6), je rôzna od fázy, ktorú získal Baldini z exp. údajov o $|f_{\phi\eta}(t)|$ pomocou vzťahu (102). Je to spôsobené tým, že náš model si vyžaduje príspevky štyroch vektorových mezónov $\omega(782)$, $\phi(1020)$, $\omega'(1420)$ a $\phi'(1680)$, čo sa prejavilo aj na predpovedanom priebehu fázy.

8.2 Prechodové formfaktory pseudoskalárnych mezónov

Pre každý prechod $\gamma^* \rightarrow \gamma P$ môže byť FF definovaný vzťahom

$$\langle P(p)\gamma(k)|J_\mu^{em}|0 \rangle = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\nu \varepsilon^\alpha k^\beta \cdot F_{\gamma P}(q^2), \quad (115)$$

kde $J_\mu^{em} = \frac{2}{3}\bar{u}\gamma_\mu u - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma_\mu d - \frac{1}{3}\bar{s}\gamma_\mu s$, ε^α je polarizačný vektor reálneho fotónu, q^2 je hybnosť prenesená γ^* a antisymetrický tenzor $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ sa objaví, pretože pseudoskalárne mezóny patria do abnormálnej spinovo-paritnej skupiny.

Priamy výpočet $F_{\gamma P}(Q^2)$ v QCD nie je možný. Brodsky a Lepage [11] použili pQCD (poruchovú QCD) na odvodenie asymptotického tvaru

$$\lim_{Q^2 \rightarrow \infty} Q^2 F_{\gamma P}(Q^2) = 2f_P \quad (116)$$

kde f_P je mezónová konštanta slabého rozpadu a $-Q^2 = q^2 \equiv t$.

Správanie $F_{\gamma P}(Q^2)$ pre $Q^2 \rightarrow 0$ môže byť určené [11] z axiálnej anomálie v chirálnej limite QCD

$$\lim_{Q^2 \rightarrow 0} F_{\gamma P}(Q^2) = \frac{1}{4\pi^2 f_P}. \quad (117)$$

V snahe opísať neperturbatívnu oblasť Q^2 Brodsky a Lepage odvodili jednoduchý interpolačný vzťah

$$F_{\gamma P}(Q^2) = \frac{1}{4\pi^2 f_P} \frac{1}{1 + (Q^2/8\pi^2 f_P^2)}, \quad (118)$$

ktorý však nie je veľmi vhodný ani na popis existujúcich priestorupodobných dát.

Zvyčajný postup v oblasti $t < 0$ pozostáva z fitovania pozorovanej závislosti FF od t pomocou normovaného fenomenologického vzorca

$$F_{\gamma P}(Q^2) = F(\Lambda_P, t)/F(\Lambda_P, 0) = \frac{1}{1 - t/\Lambda_P^2}, \quad (119)$$

kde $1/\Lambda_P^2 = \langle r_P^2 \rangle / 6$ závisí od veľkosti stredného kvadratického rádiusu $\langle r_P^2 \rangle$ pseudoskalárneho mezónu P . V oblasti $t > 0$, kde sa nachádzajú rezonancie, je potrebné zaviesť Breit-Wignerovu korekciu VMD modelu

$$F_{\gamma P}(t) = \sum_r \frac{f_{r\gamma P}}{f_r} \frac{m_r^2}{m_r^2 - t - im_r \Gamma_r}, \quad (120)$$

ktorá však je použiteľná len v rezonančnej oblasti a vo všeobecnosti porušuje unitaritu.

Naším zámerom bolo dosiahnuť popis všetkých existujúcich $t < 0$, $t > 0$ dát v rámci UA prístupu [12], rešpektujúc všetky známe vlastnosti $F_{\gamma P}$.

Asymptotické správanie pFF pri $|t| \rightarrow \infty$ je $F_{\gamma P}(t) \sim t^{-1}$, normujeme ho na hodnotu

$$F_{\gamma P}(0) = \frac{1}{4\pi^2 f_P}. \quad (121)$$

Ak však zoberieme do úvahy fakt, že f_η a $f_{\eta'}$ na rozdiel od f_π nie sú experimentálne merateľné veličiny, použitím vzorca pre dvojfotónovú parciálnu šírku pseudoskalárneho mezónu

$$\Gamma(P \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{\alpha^2}{64\pi^3 f_P^2} m_P^3 \quad (122)$$

môžeme normu (121) predefinovať na tvar cez dvojfotónovú parciálnu šírku

$$F_0 = F_{\gamma P}(0) = \frac{2}{\alpha m_P} \sqrt{\frac{\Gamma(P \rightarrow \gamma\gamma)}{\pi m_P}}. \quad (123)$$

Zo všetkých vzťahov (116)-(123) vidno, že aj v tomto prípade prechodový FF má rozmer $[GeV^{-1}]$.

Analytické vlastnosti pFF pseudoskalárnych mezónov sú nasledovné: $F_{\gamma P}(t)$ je analytický v celej komplexnej rovine t okrem rezu na kladnej časti reálnej osi od $t = m_{\pi^0}^2$ po ∞ , pretože existuje intermediálny stav $\pi^0\gamma$, ktorý generuje najnižší bod vetvenia odpovedajúceho FF.

A teda v ďalšom sa budeme snažiť skonštruovať UA model FF $F_{\gamma P}(t)$, ktorý bude mať všetky spomenuté vlastnosti. Opäť začneme z VMD parametrizácie, aby sme vzali do úvahy experimentálny fakt kreácie rôznych vektorových mezónov v elektrón-pozitrónovej anihilácii na γ a pseudoskalárny mezón. Ale najskôr, z dôvodu, že EM prúd sa v izotopickom priestore transformuje ako suma izotopického skalára a tretej zložky izotopického vektora, rozložíme EM prechodový FF pseudoskalárnych mezónov nasledovne

$$F_{\gamma P}(t) = F_{\gamma P}^{I=0}(t) + F_{\gamma P}^{I=1}(t), \quad (124)$$

kde

$$F_{\gamma P}^{I=0}(t) = \sum_{s=\omega, \phi, \omega'} \frac{m_s^2}{m_s^2 - t} \left(\frac{f_{s\gamma P}}{f_s} \right) \quad (125)$$

a

$$F_{\gamma P}^{I=1}(t) = \sum_{v=\rho,\rho'} \frac{m_v^2}{m_v^2 - t} \left(\frac{f_{v\gamma P}}{f_v} \right). \quad (126)$$

Opodstatnenosť takého rozloženia na izoskalárnu a izovektorovú časť je potvrdená aj experimentálne tým, že vektorové mezóny v základnom stave $\rho(770)$, $\omega(782)$, a $\phi(1020)$ sa rozpadajú na $\gamma\pi_0$ a $\gamma\eta$ s určitou pravdepodobnosťou.

Ak rozdelíme normu (123) na presné polovice medzi $F_{\gamma P}^{I=0}(t)$ a $F_{\gamma P}^{I=1}(t)$, potom dostávame nasledujúce ohraňovania na pomery väzbových konštánt v (125) a (126)

$$\frac{1}{\alpha m_P} \sqrt{\frac{\Gamma(P \rightarrow \gamma\gamma)}{\pi m_P}} = a_\omega + a_\phi + a_{\omega'} \quad (127)$$

a

$$\frac{1}{\alpha m_P} \sqrt{\frac{\Gamma(P \rightarrow \gamma\gamma)}{\pi m_P}} = a_\rho + a_{\rho'}, \quad (128)$$

kde $a_r = f_{r\gamma P}/f_r$. Odtiaľ redukuje počet voľných parametrov modelu, keďže napríklad $a_{\omega'}$ a $a_{\rho'}$ môžeme vyjadriť cez zvyšné pomery väzbových konštánt a_ω , a_ϕ a a_ρ , odpovedajúc. Takto prichádzame k VMD modelu s automaticky zabudovanou normou

$$\begin{aligned} F_{\gamma P}^{I=0}(t) &= \frac{1}{2} F_0 \frac{m_{\omega'}^2}{m_{\omega'}^2 - t} + \left[\frac{m_\omega^2}{m_\omega^2 - t} - \frac{m_{\omega'}^2}{m_{\omega'}^2 - t} \right] a_\omega + \left[\frac{m_\phi^2}{m_\phi^2 - t} - \frac{m_{\omega'}^2}{m_{\omega'}^2 - t} \right] a_\phi \\ F_{\gamma P}^{I=1}(t) &= \frac{1}{2} F_0 \frac{m_{\rho'}^2}{m_{\rho'}^2 - t} + \left[\frac{m_\rho^2}{m_\rho^2 - t} - \frac{m_{\rho'}^2}{m_{\rho'}^2 - t} \right] a_\rho, \end{aligned} \quad (129)$$

vhodný pre konštrukciu UA modelu EM prechodového FF pseudoskalárnych mezónov, ktorý po zabudovaní analytických vlastností podobne ako v predchádzajúcom paragrafe, pomocou nelineárnej transformácie a tiež správnym zabudovaním nestabilnosti vektorových mezónov nadobúda tvar

$$\begin{aligned} F_{\gamma P}^{I=0}(t) &= \left(\frac{1 - U^2}{1 - U_N^2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} F_0 \frac{(U_N - U_{\omega'}) (U_N - U_{\omega'}^*) (U_N + U_{\omega'}) (U_N + U_{\omega'}^*)}{(U - U_{\omega'}) (U - U_{\omega'}^*) (U + U_{\omega'}) (U + U_{\omega'}^*)} + \right. \\ &+ \left[\frac{(U_N - U_\omega) (U_N - U_\omega^*) (U_N - 1/U_\omega) (U_N - 1/U_\omega^*)}{(U - U_\omega) (U - U_\omega^*) (U - 1/U_\omega) (U - 1/U_\omega^*)} - \right. \\ &- \left. \frac{(U_N - U_{\omega'}) (U_N - U_{\omega'}^*) (U_N + U_{\omega'}) (U_N + U_{\omega'}^*)}{(U - U_{\omega'}) (U - U_{\omega'}^*) (U + U_{\omega'}) (U + U_{\omega'}^*)} \right] a_\omega + \\ &+ \left[\frac{(U_N - U_\phi) (U_N - U_\phi^*) (U_N + U_\phi) (U_N + U_\phi^*)}{(U - U_\phi) (U - U_\phi^*) (U + U_\phi) (U + U_\phi^*)} - \right. \end{aligned} \quad (130)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(U_N - U_{\omega'}) (U_N - U_{\omega'}^*) (U_N + U_{\omega'}) (U_N + U_{\omega'}^*)}{(U - U_{\omega'}) (U - U_{\omega'}^*) (U + U_{\omega'}) (U + U_{\omega'}^*)} \Big] a_\phi \Big) \\
F_{\gamma P}^{I=1}(t) = & \left(\frac{1 - V^2}{1 - V_N^2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} F_0 \frac{(V_N - V_{\rho'}) (V_N - V_{\rho'}^*) (V_N + V_{\rho'}) (V_N + V_{\rho'}^*)}{(V - V_{\rho'}) (V - V_{\rho'}^*) (V + V_{\rho'}) (V + V_{\rho'}^*)} + \right. \\
& + \left[\frac{(V_N - V_\rho) (V_N - V_\rho^*) (V_N - 1/V_\rho) (V_N - 1/V_\rho^*)}{(V - V_\rho) (V - V_\rho^*) (V - 1/V_\rho) (V - 1/V_\rho^*)} - \right. \\
& \left. \left. - \frac{(V_N - V_{\rho'}) (V_N - V_{\rho'}^*) (V_N + V_{\rho'}) (V_N + V_{\rho'}^*)}{(V - V_{\rho'}) (V - V_{\rho'}^*) (V + V_{\rho'}) (V + V_{\rho'}^*)} \right] a_\rho \right). \tag{131}
\end{aligned}$$

Využitím označení (110) a (111) možno vzťahy (130) a (131) písať v nasledujúcej jednoduchšej forme

$$F_{\gamma P}^{I=0}(t) = \left(\frac{1 - U^2}{1 - U_N^2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} F_0 H(U_{\omega'}) + \left[D(U_\omega) - H(U_{\omega'}) \right] a_\omega + \left[H(U_\phi) - H(U_{\omega'}) \right] a_\phi \right) \tag{132}$$

a

$$F_{\gamma P}^{I=1}(t) = \left(\frac{1 - V^2}{1 - V_N^2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} F_0 H(V_{\rho'}) + \left[D(V_\rho) - H(V_{\rho'}) \right] a_\rho \right). \tag{133}$$

Hodnotu $F_{\gamma P}(0)$ získame zo vzťahu (123), $\Gamma(P \rightarrow \gamma\gamma)$ dosadíme z tabuliek [10].

Z dát, ktoré sme mali k dispozícii v [12], iba experimenty v Serpuchove [19], [20] a Novosibirsku [21] boli z oblasti $t > 0$. Takto existoval nepomer medzi počtom experimentálne nameraných bodov odpovedajúcich FF pseudskalárnych mezónov v priestoropodobnej [13]-[18], a časupodobnej [19]-[21] oblasti v prospech $t < 0$. Navyše, dáta [19], [20] sú normované na hodnotu $F_{\gamma P}(0) = 1$ (relatívny formfaktor), pričom nie je známa presná hodnota $F_{\gamma P}(0)$, ktorú autori uvažovali. V tomto prípade sme postupovali tak, že sme $F_{\gamma P}(0)$ vypočítali z tabuľkových hodnôt $\Gamma(P \rightarrow \gamma\gamma)$ [10] a ostatné dáta sme vynásobili odpovedajúcim faktorom. Veľkým prínosom boli dáta pre FF mezónov π^0 (12 experimentálnych bodov) a η (14 experimentálnych bodov) z Novosibirska vo ϕ píku [21], ktoré pomohli upresniť priebeh funkcie v oblasti energií okolo 1 GeV. Pre FF mezónu η' sme takéto dáta žiaľ v [12] nemali k dispozícii, poznali sme len 4 experimentálne body v oblasti $t > 0$, preto sme priebeh FF η' mohli určiť menej presne ako v ostatných prípadoch, i keď najviac experimentálnych dát v práci [12] sme mali práve v prípade tohto mezónu (59 bodov, oproti 52 pre η a 33 pre π^0).

Údaje z experimentov, kde bola iná normalizácia, sme vynásobili príslušným faktorom, v prípade [14]-[18] $1/4\pi\alpha$, kde α je konštantou jemnej štruktúry, v prípade dát z experimentov v Serpuchove [19], [20] hodnotou

určenou dosadením $\Gamma(P \rightarrow \gamma\gamma)$ z [10] do (123). Čo sa týka dát z Novosibirska [21], na získanie absolútnej hodnoty pFF z hodnôt účinných prierezov $\sigma_{e^+e^- \rightarrow \gamma P}$ sme použili vzťah uvedený autormi

$$F_{\gamma P}(t) = \frac{1}{\alpha} \frac{t}{t - m_P^2} \sqrt{\frac{2t \cdot \sigma(t)}{\pi(t - m_P^2)}}. \quad (134)$$

Pre určenie parametrov UA modelu pFF mezónu η' sme v [12] mali k dispozícii až 7 rôznych zdrojov dát, zatiaľ čo pre π^0 sme mali len 3 a pre η 5 zdrojov. Ale len experimenty CLEO [13] a CELLO [14] zhromaždili výsledky pre všetky uvažované pseudoskalárne mezóny.

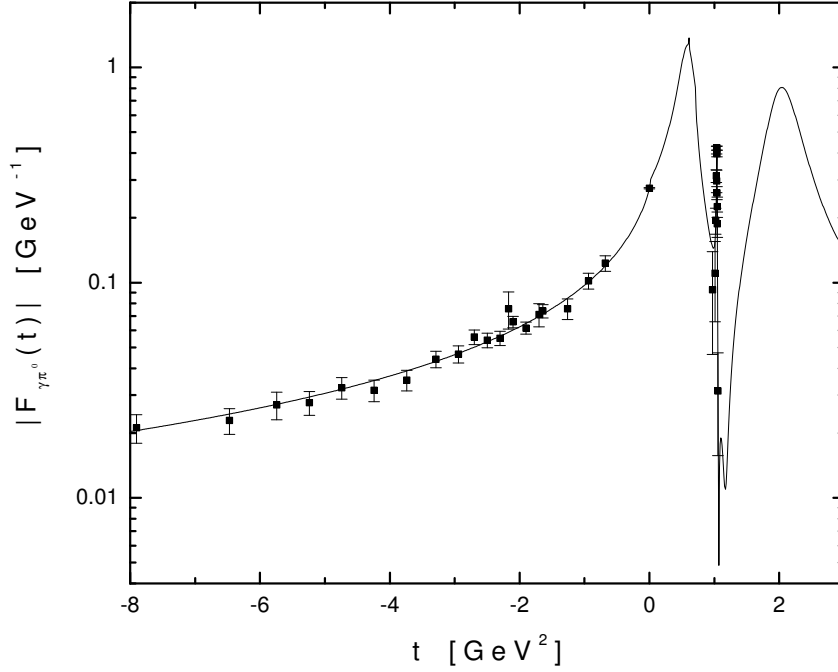
Ešte pred analýzou údajov sme kvôli veľkej chybe z dát pre FF η' vylúčili posledný bod experimentu [20] a kvôli nepoužiteľnosti vzťahu (134), keďže odpovedajúce experimentálne hodnoty účinných prierezov nadobúdajú negatívne hodnoty, posledné 2 body v prípade π^0 experimentu [21].

Vo všeobecnosti možno povedať, že experimenty CELLO a TPC/2 γ [14]-[16] sú zaťažené väčšou chybou než pomerne nedávny experiment CLEO II [13]. Nie veľmi presný sa ukazuje byť experiment PLUTO [18], hlavne v oblasti záporných hodnôt t vzdialenejších od 0, kde chyby jednotlivých meraní dosahujú päťnásobok hodnôt oproti ostatným experimentom. Posledné dve hodnoty z merania [20] a prvá hodnota z merania [18] sú zaťažené extrémnymi chybami $\sim 0.3 \times F_{\gamma P}(t)$, v prípade [18] dokonca väčšie ako $F_{\gamma P}(t)$, preto je tiež opodstatnené tieto experimentálne body z analýzy vylúčiť.

Na obr. 7-9 sú zobrazené výsledky fitov experimentálnych dát získaných použitím unitárneho a analytického modelu FF pseudoskalárnych mezónov, nasýteného nasledovnými vektorovými mezónmi: ω , ϕ , ω' a ρ , ρ' . Píky reprezentujú vektorové mezóny, pričom píky ρ a ω mezónov sa vzájomne prekrývajú (resp. sú spojené do jedného). Vidíme, že vo všetkých prípadoch je spoločný pík ω' a ρ' značne širší než ostatné píky, čo odpovedá nameraným väčším totálnym šírkam rozpadu.

V prípade π^0 , kde pomer χ^2/NDF (NDF je počet stupňov voľnosti, t.j. počet analyzovaných experimentálnych bodov mínus počet fitovaných parametrov) dosiahol hodnotu 0.68, príspevok ω mezónu je zanedbateľný a prvý pík približne trikrát vyšší než pík ϕ a dosahuje hodnoty $\sim 1.5 \text{ GeV}^{-1}$ je zapríčinený iba príspevkom ρ mezónu. Polohy efektívnych bodov vetvenia sú

$$t_{in}^s = 0.61243 \pm 0.36932 \text{ GeV}^2; \quad t_{in}^v = 0.71321 \pm 0.07248 \text{ GeV}^2$$



Obrázok 7: Správanie sa absolútnej hodnoty pFF π^0 mezónu v rámci UA modelu

a pomery väzbových konštant

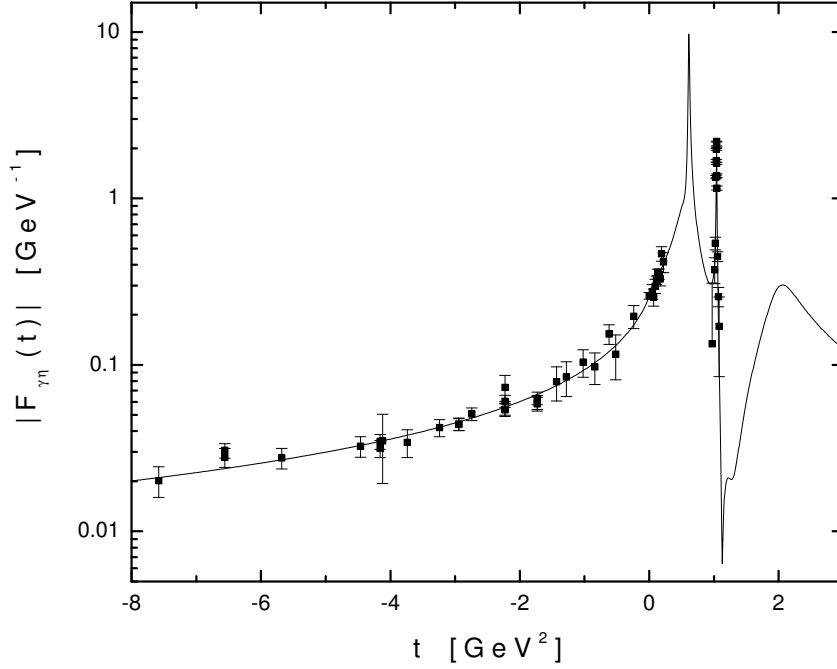
$$\begin{aligned}
 f_{\omega\gamma\pi^0}/f_{\omega} &= +0.00183 \pm 0.03906 \quad [GeV^{-1}] \\
 f_{\phi\gamma\pi^0}/f_{\phi} &= -0.00173 \pm 0.00015 \quad [GeV^{-1}] \\
 f_{\rho\gamma\pi^0}/f_{\rho} &= +0.22406 \pm 0.03494 \quad [GeV^{-1}].
 \end{aligned}$$

V prípade η mezónu pík odpovedajúci ϕ mezónu je štyrikrát menší než pík $\rho + \omega$. Dosahuje hodnotu $\sim 2.5 \text{ GeV}^{-1}$. Pomer χ^2/NDF dosahuje 1.15. Polohy efektívnych bodov vetvenia sú

$$t_{in}^s = 1.03239 \pm 0.00047 \text{ GeV}^2; \quad t_{in}^v = 0.59623 \pm 1.03278 \text{ GeV}^2$$

a pomery väzbových konštant

$$\begin{aligned}
 f_{\omega\gamma\eta}/f_{\omega} &= +0.11287 \pm 0.00554 \quad [GeV^{-1}] \\
 f_{\phi\gamma\eta}/f_{\phi} &= -0.08562 \pm 0.00010 \quad [GeV^{-1}] \\
 f_{\rho\gamma\eta}/f_{\rho} &= +0.11826 \pm 0.00574 \quad [GeV^{-1}].
 \end{aligned}$$



Obrázok 8: Predpovedané správanie absolútnej hodnoty pFF η mezónu v rámci UA modelu

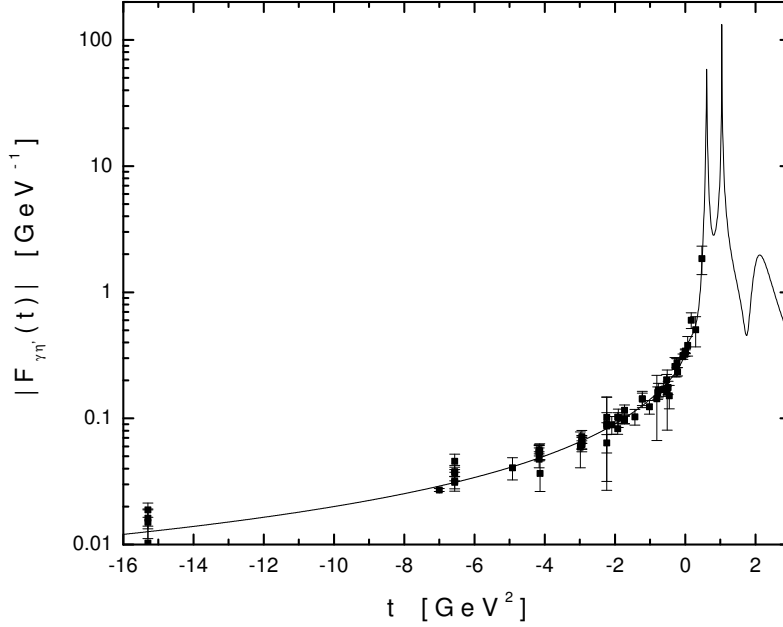
Na rozdiel od oboch predošlých prípadov, v grafe závislosti pre η' je pík ϕ trojnásobne vyšší od píku $\rho+\omega$ a dosahuje maximum $\sim 150 \text{ GeV}^{-1}$. Spoločný pík ω' a ρ' je v tomto prípade veľmi nevýrazný a iba nebadateľne ovplyvňuje priebeh funkcie, čo však môže byť zapríčinené nedostatkom dát v časupodobnej oblasti. χ^2/NDF dosahuje hodnotu 1.23. Efektívne body vetvenia sú

$$t_{in}^s = 1.03928 \pm 0.48383 \text{ GeV}^2; \quad t_{in}^v = 1.03245 \pm 0.33097 \text{ GeV}^2$$

a pomery väzbových konštánt

$$\begin{aligned} f_{\omega\gamma\eta'}/f_{\omega} &= +0.06446 \pm 0.00093 \quad [GeV^{-1}] \\ f_{\phi\gamma\eta'}/f_{\phi} &= +0.04502 \pm 0.00151 \quad [GeV^{-1}] \\ f_{\rho\gamma\eta'}/f_{\rho} &= +0.05656 \pm 0.00077 \quad [GeV^{-1}]. \end{aligned}$$

Medzičasom sa objavili nové experimentálne údaje o totálnych účinných prierezoch elektrón-pozitrónovej anihilácie na $\pi^0\gamma$ a $\eta\gamma$ z Novosibirska [22] - [24] v intervale hodnôt štvorca totálnej energie v sústave hmotného stredu $0.3600\text{GeV}^2 \leq t \leq 1.9044\text{GeV}^2$ [23],[24], prípadne $0.3600\text{GeV}^2 \leq t \leq 0.9409\text{GeV}^2$ [22], z ktorých je možné vytiahnuť informáciu o odpovedajúcich pFF v celej oblasti pokrývajúcej ρ, ω a ϕ rezonancie.



Obrázok 9: Predpoveď UA modelu pre absolútnu hodnotu pFF η' mezónu

Našou úlohou je takéto údaje o prechodových FF z týchto údajov o účinných prierezoch vypočítať a potom analyzovať [25] spolu s už predtým existujúcimi údajmi v rámci nami konštruovaných UA modelov.

Jednako ale, ak porovnáme údaje pre totálne účinné prierezy $e^+e^- \rightarrow \pi^0\gamma$, $e^+e^- \rightarrow \eta\gamma$ namerané detektorom CMD-2 na VEPP-2M v Novosibirsku v roku 2001 [22] s údajmi nameranými na tom istom detektore opublikovanými v roku 2005 [24], nachádzame medzi nimi absolútnu nekonzistentnosť. Keďže v práci [24] tých istých autorov neexistuje o poslednom žiadna zmienka, údaje opublikované v roku 2001 [22] považujeme za nespoľahlivé a vylučujeme ich z analýzy.

Iný problém vyvoláva nekonzistentnosť medzi totálnymi účinnými prierezmi procesu $e^+e^- \rightarrow \pi^0\gamma$ nameranými pomocou neutrálneho detektora SND na VEPP-2M v Novosibirku [23] a nameranými pomocou CMD-2 detektora [24], hlavne v oblasti ρ, ω rezonancií. Ešte markantnejšia nekonzistentnosť sa objavuje medzi staršími nameranými účinnými prierezmi procesov $e^+e^- \rightarrow \pi^0\gamma$ a $e^+e^- \rightarrow \eta\gamma$ detektorom SND [21] na VEP-2M v Novosibirsku len v oblasti ϕ mezónu (tieto sme analyzovali vyššie) a údajmi nameranými pomocou CDM-2 [24].

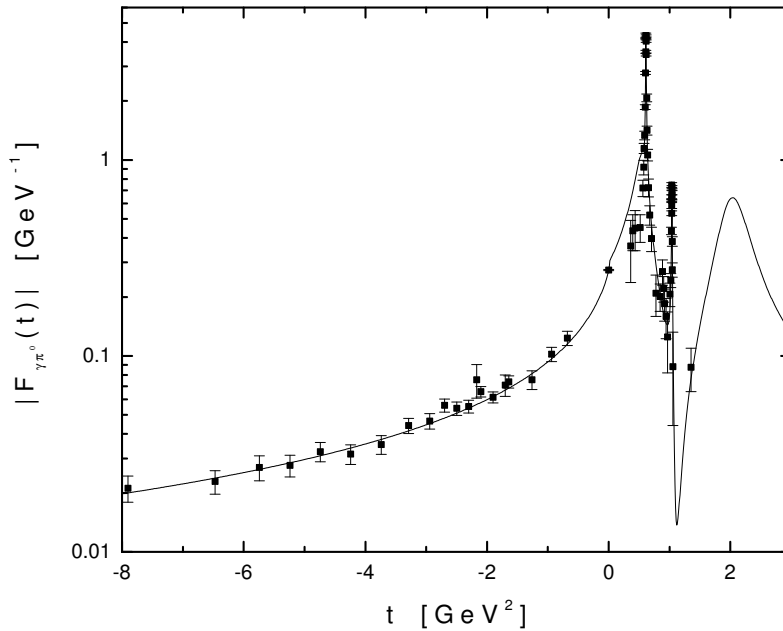
Na základe uvedených faktov prichádzame k záveru, že údaje o $e^+e^- \rightarrow \pi^0\gamma$ a $e^+e^- \rightarrow \eta\gamma$ procesoch, hoci namerané v tom istom centre a na tom

istom urýchľovači VEP-2M, ale pomocou dvoch rôznych detektorov SND a CDM-2, sú nedôveryhodné. V takom prípade nám zostáva možnosť nevšímať si všetky staršie údaje, vrátane už nami analyzovaných údajov v oblasti ϕ rezonancie, a pokúsiť sa previesť analýzu iba s najnovšími údajmi z Novosibirska [24] súvisle pokrývajúcich oblasť všetkých troch ρ, ω a ϕ rezonancií.

Keďže navyše jednotliví autori uvádzajú rôzne vzťahy medzi účinným prierezom procesov $e^+e^- \rightarrow \gamma P$ a druhou mocninou absolútnej hodnoty pFF $|F_{\gamma P}(t)|^2$, vypočítali sme maticový element z Feynmanovho diagramu elektrón-pozitrónovej anihilácie na pseudoskalárny mezón a fotón v jedno-fotónovej aproximácii a našli explicitný tvar totálneho účinného prierezu $\sigma(e^+e^- \rightarrow P\gamma)$, z ktorého sme dospeli k nasledovnému vzťahu

$$F_{\gamma P}(t) = \frac{1}{\alpha} \frac{t}{t - m_P^2} \sqrt{\frac{6t \cdot \sigma(t)}{\pi(t - m_P^2)}} \quad (135)$$

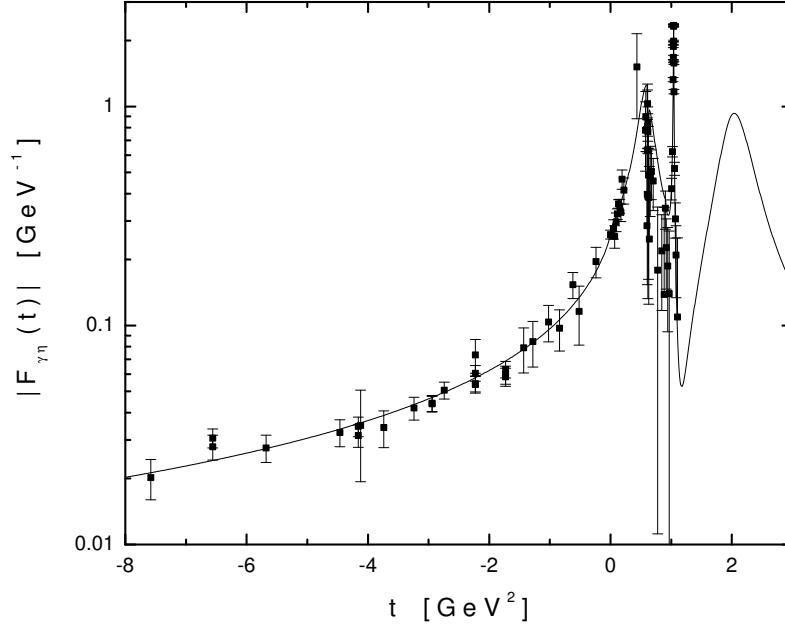
pre výpočet pFF pseudoskalárnych mezónov.



Obrázok 10: Výsledok analýzy pFF π^0 mezónu s novými údajmi

Pomocou poslednej formuly sme našli 45 nových časupodobných údajov o pFF π^0 mezónu a 42 nových časupodobných údajov o pFF η mezónu. Tieto sme skombinovali so všetkými odpovedajúcimi priestoru-podobnými údajmi a znova previedli analýzu pomocou UA modelu (124), (130) a (131).

Fitovaním sme našli efektívne body vetvenia v hodnotách



Obrázok 11: Nové správanie sa pFF η mezónu predvedané UA modelom

$$t_{in}^s = 0.61751 \pm 0.00530 \text{ GeV}^2; \quad t_{in}^v = 0.61123 \pm 0.01956 \text{ GeV}^2$$

a pomery väzbových konštánt

$$\begin{aligned} f_{\omega\gamma\pi^0}/f_{\omega} &= +0.04043 \pm 0.00050 \quad [GeV^{-1}] \\ f_{\phi\gamma\pi^0}/f_{\phi} &= -0.00307 \pm 0.00007 \quad [GeV^{-1}] \\ f_{\rho\gamma\pi^0}/f_{\rho} &= +0.18914 \pm 0.00364 \quad [GeV^{-1}]. \end{aligned} \quad (136)$$

Nové správanie pFF π^0 mezónu je zobrazené na obr. 10. Z obr. 10 pre pFF π^0 mezón vidno, že v oblasti nástupu píku $\rho+\omega$ a v sedle medzi ním a píkom ϕ náš UA model nepopisuje presne existujúce exp. údaje. Domnievame sa, že nakoľko sú to hodnoty v blízkosti prahu, použitý detektor nebol schopný účinne zaznamenať dva fotóny z detegovaných troch, ktoré vznikli rozpadom π^0 mezónu.

Čo sa týka experimentálnych hodnôt pFF mezónu η , ich fitovaním sme našli body vetvenia v hodnotách

$$t_{in}^s = 0.68019 \pm 0.07898 \text{ GeV}^2; \quad t_{in}^v = 0.91027 \pm 0.03723 \text{ GeV}^2.$$

Pomery väzbových konštánt sú rovné

$$\begin{aligned} f_{\omega\gamma\eta}/f_{\omega} &= -0.02036 \pm 0.00179 \quad [GeV^{-1}] \\ f_{\phi\gamma\eta}/f_{\phi} &= -0.00993 \pm 0.00007 \quad [GeV^{-1}] \\ f_{\rho\gamma\eta}/f_{\rho} &= +0.23507 \pm 0.00507 \quad [GeV^{-1}]. \end{aligned}$$

a dostávame $\chi^2 = 141$, pričom pomer $\chi^2/NDF = 1.88$ svedčí o dobrom popise z hľadiska štatistiky.

Nový priebeh porovnaný s fitujúcimi experimentálnymi údajmi je zobrazený na obr. 11. Ako vidno z obr. 11, jeden z experimentálnych bodov je úplne chybný a dva v sedle medzi píkami majú extrémne chyby.

Pre η' mezón stále nie sú v časupodobnej oblasti nové údaje a preto predchádzajúce výsledky analýzy zostávajú zatiaľ v platnosti.

9 Podivné prechodové formfaktory mezónov

V posledných rokoch bolo venované veľké úsilie experimentálnemu potvrdeniu [26]-[28] príspevku podivných kvark-antikvarkových párov z mora do štruktúry nukleónov, ktoré ako vieme sú zložené z nepodivných kvarkov $p(u, u, d)$, $n(u, d, d)$ a teda v konečnom dôsledku sú nepodivné častice. Výsledkami týchto experimentov boli hodnoty nukleónových podivných elektrických a magnetických FF a ich kombinácií pri nenulovom kvadráte prenesenej hybnosti t .

Na druhej strane boli rozpracované rôzne teoretické prístupy [29]-[33], v rámci ktorých sa dajú predpovedať priebehy podivných elektrických a magnetických (alebo Diracových a Pauliho) FF nukleónov. Prístup [33], ktorý úspešne opísal experimentálne údaje o nukleónoch, možno aplikovať tiež na predpovedanie správania sa podivných pFF mezónov.

Idea spočíva v nasledovnom. Nakoľko podivný kvark s je izoskalárom, podivné FF ľubovoľných hadrónov môžu prispievať len ku správaniu izoskalárnych častí EM FF uvažovaných hadrónov. Navyiac, keďže pri predpovedi podivných FF pomocou izoskalárnych častí EM FF sa využíva efekt $\omega - \phi$ zmiešavania, je žiadúce aby v izoskalárnych častiach EM FF boli voľnými parametrami pomery väzbových konštánt vždy dvojice $\omega(782)$, $\phi(1020)$ mezónov (a prípadne tiež ich excitácií) súčasne. Potom ak a_ω, a_ϕ sú voľné parametre UA modelu izoskalárnej časti EM FF hadrónu a b_ω, b_ϕ parametre UA modelu odpovedajúceho podivného FF s rovnakou vnútornou analytickou štruktúrou, až na odlišné asymptotické správanie a odlišnú normu, neznáme parametre b_ω, b_ϕ sa zo známych parametrov a_ω, a_ϕ určia pomocou nasledovných vzťahov

$$\begin{aligned} b_\omega &= -\sqrt{6} \frac{\sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon + \theta_0)} a_\omega \\ b_\phi &= -\sqrt{6} \frac{\cos \varepsilon}{\cos(\varepsilon + \theta_0)} a_\phi, \end{aligned} \tag{137}$$

kde $\varepsilon = 3.7^\circ$ je odchýlka od ideálneho zmiešavania ω a ϕ , $\theta_0 = 35.3^\circ$.

Tieto vzťahy sa dajú odvodiť vychádzajúc z nasledovných dvoch predpokladov:

1. platí experimentálny fakt $\omega - \phi$ zmiešavania

$$\begin{aligned} |\omega\rangle &= |\omega_0\rangle \cdot \cos \varepsilon - |\phi_0\rangle \cdot \sin \varepsilon \\ |\phi\rangle &= |\omega_0\rangle \cdot \sin \varepsilon + |\phi_0\rangle \cdot \cos \varepsilon, \end{aligned} \quad (138)$$

kde $|\omega_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{u}u\rangle + |\bar{d}d\rangle)$ a $|\phi_0\rangle = |\bar{s}s\rangle$, tiež pre väzbové konštanty medzi kvarkovým prúdom a vektorovým mezónom

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_\omega} &= \frac{1}{f_{\omega_0}} \cos \varepsilon - \frac{1}{f_{\phi_0}} \sin \varepsilon \\ \frac{1}{f_\phi} &= \frac{1}{f_{\omega_0}} \sin \varepsilon + \frac{1}{f_{\phi_0}} \cos \varepsilon \end{aligned} \quad (139)$$

2. kvarkový prúd s vôňou r sa zlučuje výlučne s komponentou vlnovej funkcie vektorového mezónu $|(\bar{q}_t q_t)_V\rangle$ s rovnakou vôňou a silou charakterizovanou univerzálnou väzbovou konštantou \varkappa , t.j.

$$\langle 0 | \bar{q}_r \gamma_\mu q_r | (\bar{q}_t q_t)_V \rangle = \varkappa m_V^2 \delta_{rt} \varepsilon_\mu. \quad (140)$$

kde m_V a ε_μ sú hmotnosť a polarizačný vektor uvažovaného vektorového mezónu.

Ak zoberieme do úvahy definíciu univerzálnej väzbovej konštanty $1/f_V^e$ pomocou elektromagnetického toku

$$\langle 0 | J_\mu^e | V \rangle = \frac{m_V^2}{f_V^e} \cdot \varepsilon_\mu$$

a výraz (140) vyjadrený cez kvarkové polia, získavame vzťahy

$$\begin{aligned}
\langle 0|J_\mu^{I=0}|\omega_0\rangle &= \langle 0|\frac{1}{6}(\bar{u}\gamma_\mu u + \bar{d}\gamma_\mu d) - \frac{1}{3}\bar{s}\gamma_\mu s\frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{u}u\rangle + |\bar{d}d\rangle) = \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\varkappa m_{\omega_0}^2 \varepsilon_\mu \equiv \frac{m_{\omega_0}^2}{f_{\omega_0}^e} \varepsilon_\mu \quad (141) \\
\langle 0|J_\mu^{I=0}|\phi_0\rangle &= \langle 0|\frac{1}{6}(\bar{u}\gamma_\mu u + \bar{d}\gamma_\mu d) - \frac{1}{3}\bar{s}\gamma_\mu s|\bar{s}s\rangle = \\
&= -\frac{1}{3}\varkappa m_{\phi_0}^2 \varepsilon_\mu \equiv \frac{m_{\phi_0}^2}{f_{\phi_0}^e} \varepsilon_\mu,
\end{aligned}$$

z ktorých vyplýva, že

$$\frac{1}{f_{\omega_0}^e} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\varkappa = \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{3}}\varkappa \quad ; \quad \frac{1}{f_{\phi_0}^e} = -\frac{1}{3}\varkappa = -\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{2}{3}}\varkappa. \quad (142)$$

Po dosadení do (139) a použitím identít $1/\sqrt{3} = \sin\theta_0$ a $\sqrt{2/3} = \cos\theta_0$ dostávame

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f_\omega^e} &= \frac{\varkappa}{\sqrt{6}} \sin(\varepsilon + \theta_0) \quad (143) \\
\frac{1}{f_\phi^e} &= -\frac{\varkappa}{\sqrt{6}} \cos(\varepsilon + \theta_0).
\end{aligned}$$

Vzťahy (143), spolu s $\frac{1}{f_\rho^e} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varkappa$, ktorý plynie zo vzťahu

$$\begin{aligned}
\langle 0|J_\mu^{I=1}|\rho\rangle &= \langle 0|\frac{1}{2}(\bar{u}\gamma_\mu u - \bar{d}\gamma_\mu d)\frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{u}u\rangle - |\bar{d}d\rangle) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\varkappa m_\rho^2 \varepsilon_\mu \equiv \frac{m_\rho^2}{f_\rho^e} \varepsilon_\mu \quad (144)
\end{aligned}$$

dávajú nasledujúcu predpoveď

$$\frac{1}{f_\rho^e} : \frac{1}{f_\omega^e} : \frac{1}{f_\phi^e} = 0.71 : 0.25 : (-0.32)$$

vo veľmi dobrom súhlase s experimentálnymi hodnotami

$$\frac{1}{f_\rho^e} : \frac{1}{f_\omega^e} : \frac{1}{f_\phi^e} = 0.79 : 0.23 : (-0.31)$$

získanými pomocou výrazu

$$f_v^2/4\pi = \frac{\alpha^2}{3} \frac{m_v}{\Gamma(V \rightarrow e^+e^-)} \text{ berúc } \Gamma(V \rightarrow e^+e^-) \text{ z Rev. Part. Physics [10]. Takže}$$

platnosť druhého predpokladu uvedeného vyššie sme takto overili priamo v experimentoch a súhlas je prekvapujúco dobrý.

Pre podivný prúd $J_\mu^s = \bar{s}\gamma_\mu s$ môžeme definovať univerzálnu väzbovú konštantu $1/f_V^s$ vzťahom

$$\langle 0|J_\mu^s|V \rangle = \frac{m_V^2}{f_V^s} \cdot \varepsilon_\mu$$

a analogicky s (145) dostávame

$$\begin{aligned} \langle 0|J_\mu^s|\omega_0 \rangle &= \langle 0|\bar{s}\gamma_\mu s \frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{u}u \rangle + |\bar{d}d \rangle) \rangle = 0 = \frac{m_{\omega_0}^2}{f_{\omega_0}^s} \varepsilon_\mu \\ \langle 0|J_\mu^s|\phi_0 \rangle &= \langle 0|\bar{s}\gamma_\mu s|\bar{s}s \rangle = 1 \cdot \varkappa m_{\phi_0}^2 \varepsilon_\mu = \frac{m_{\phi_0}^2}{f_{\phi_0}^s} \varepsilon_\mu, \end{aligned} \quad (145)$$

z čoho vidno, že $1/f_{\omega_0}^s = 0$ a $1/f_{\phi_0}^s = 1 \cdot \varkappa$. Po dosadení týchto vzťahov do $\omega - \phi$ zmiešavania pre väzbové konštanty môžeme písať

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_\omega^s} &= -\varkappa \sin \varepsilon \\ \frac{1}{f_\phi^s} &= +\varkappa \cos \varepsilon. \end{aligned} \quad (146)$$

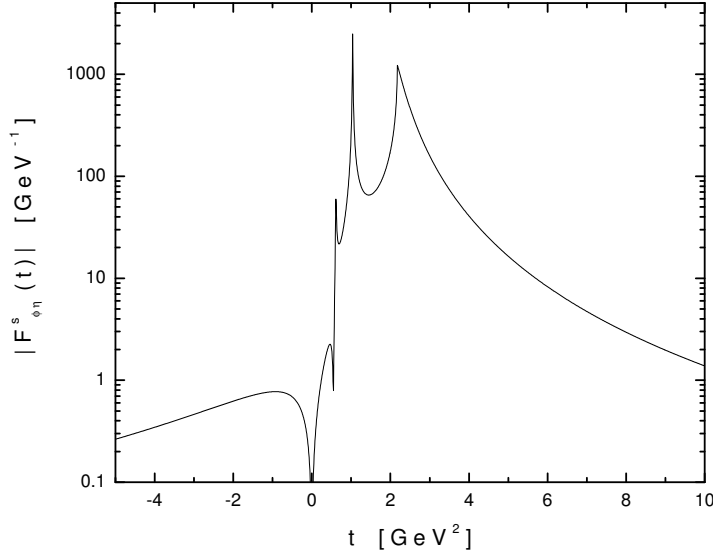
Napokon dajúc do pomeru odpovedajúce väzbové konštanty z (146) a (143) a vynásobiac výsledné vzťahy väzbovou konštantou f_{VAB} dostávame nakoniec (137).

9.1 Podivný prechodový formfaktor $\phi\eta$

Pri konštrukcii UA modelu prechodového podivného formfaktora $F_{\phi\eta}^s(t)$ využijeme VMD parametrizáciu s tromi prvými izoskalárnymi vektorovými mezónmi. Pomocou nelineárnej transformácie (104) a korektným zabudovaním nestabilnosti vektorových mezónov prichádzame k tvaru so správnymi analytickými vlastnosťami

$$\tilde{F}_{\phi\eta}^s(t) = \left(\frac{1-U^2}{1-U_N^2} \right)^2 \cdot \left([D_\omega(U) - H_{\omega'}(U)]b_\omega + [D_\phi(U) - H_{\phi'}(U)]b_\phi \right), \quad (147)$$

ale stále s asymptotikou počiatočného VMD modelu. Až po vynásobení oboch strán výrazu (147) faktorom $(\frac{1-U^2}{1-U_N^2})^4$ a predefinovaním podivného prechodového FF



Obrázok 12: Priebeh predpovedanej absolútnej hodnoty podivného pFF $F_{\phi\eta}(t)$

$$F_{\phi\eta}^s(t) = \tilde{F}_{\phi\eta}^s(t) \left(\frac{1 - U^2}{1 - U_N^2} \right)^4 \quad (148)$$

prichádzame k UA modelu pre podivný $\phi\eta$ formfaktor

$$F_{\phi\eta}^s(t) = \left(\frac{1 - U^2}{1 - U_N^2} \right)^6 \cdot \left([D_\omega(U) - H_{\omega'}(U)]b_\omega + [D_\phi(U) - H_{\omega'}(U)]b_\phi \right), \quad (149)$$

s požadovanou normou a správnym asymptotickým správaním.

Voľné parametre b_ω a b_ϕ sú vypočítané pomocou vzťahov (137) z a_ω a a_ϕ číselne uvedenými v (114).

Predpovedané správanie podivného prechodového formfaktora $F_{\phi\eta}^s(t)$ je uvedené na obr. 12.

9.2 Podivné prechodové formfaktory pseudoskalárnych mezónov

Podivné prechodové formfaktory pseudoskalárnych mezónov sú definované analogicky s elektromagnetickými FF

$$\langle P(p)\gamma(k)|J_\mu^s|0\rangle = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\nu \epsilon^\alpha k^\beta F_{\gamma P}^s(t) \quad (150)$$

kde $J_\mu^s = \bar{s}\gamma_\mu s$ je podivný vektorový prúd.

Pretože celková podivnosť P a γ je nulová, norma podivného FF nadobúda tvar

$$F_{\gamma P}^s(0) = 0. \quad (151)$$

Asymptotika podivného formfaktoru pre $|t| \rightarrow \infty$ je

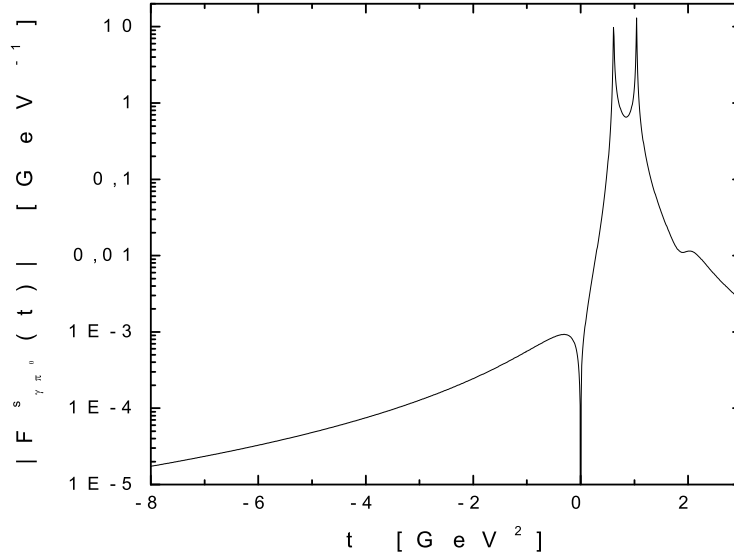
$$F_{\gamma P}^s(t)|_{|t| \rightarrow \infty} \sim t^{-3}, \quad (152)$$

pretože k štruktúre P prispievajú aj kvarky s a \bar{s} .

Analytické vlastnosti $F_{\gamma P}^s(t)$ sú totožné s analytickými vlastnosťami $F_{\gamma P}^{I=0}(t)$. Pri konštrukcii UA modelu $F_{\gamma P}^s(t)$ [34] využívame VMD parametrizáciu

$$\tilde{F}_{\gamma P}^s(t) = \sum_{V=\omega, \phi, \omega'} \frac{m_V^2}{m_V^2 - t} (f_{VP\gamma} / f_V^s), \quad (153)$$

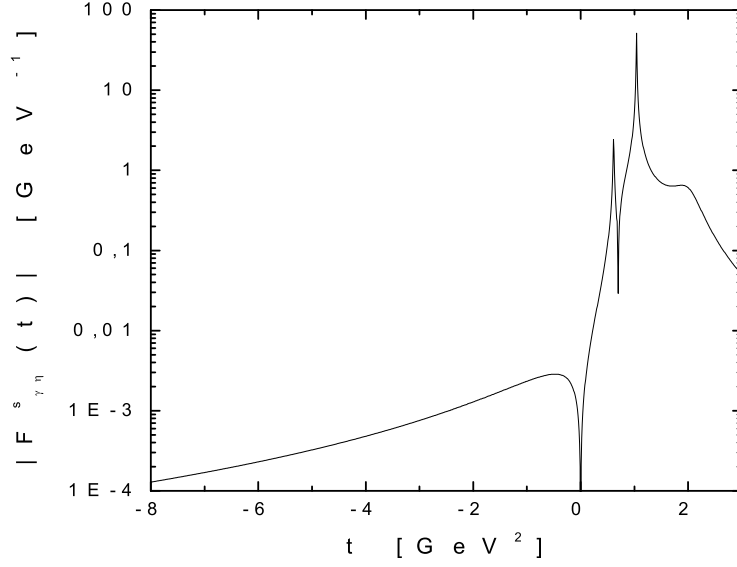
kde f_V^s predstavuje väzbu podivného prúdu k vektorovému mezónu $V = \omega, \phi, \omega'$. Označenie $\tilde{F}_{\gamma P}^s(t)$ používame z toho dôvodu, že FF má stále asymptotiku VMD modelu.



Obrázok 13: Správanie absolútnej hodnoty podivného pFF π^0 mezónu

Požiadavka normovanosti vedie k výrazu

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\gamma P}^s(t) &= \left(\frac{m_\omega^2}{m_\omega^2 - t} - \frac{m_{\omega'}^2}{m_{\omega'}^2 - t} \right) b_\omega + \\ &+ \left(\frac{m_\phi^2}{m_\phi^2 - t} - \frac{m_{\omega'}^2}{m_{\omega'}^2 - t} \right) b_\phi. \end{aligned} \quad (154)$$



Obrázok 14: Priebeh absolútnej hodnoty podivného pFF η mezónu

Analogicky k (132) UA model $\tilde{F}_{\gamma P}^s(t)$ má tvar

$$\tilde{F}_{\gamma P}^s(t) = \left(\frac{1-U^2}{1-U_N^2} \right)^2 \cdot \left([D_\omega(U) - H_{\omega'}(U)]b_\omega + [H_\phi(U) - H_{\omega'}(U)]b_\phi \right) \quad (155)$$

avšak asymptotika je stále asymptotikou VMD modelu. Ak ale zmeníme exponent v asymptotickom člene

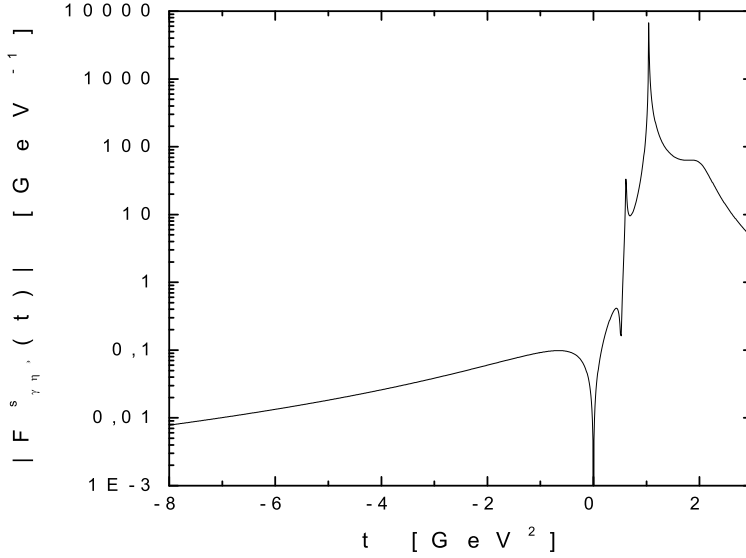
$$\left(\frac{1-U^2}{1-U_N^2} \right)^2 \rightarrow \left(\frac{1-U^2}{1-U_N^2} \right)^6, \quad (156)$$

dostaneme požadovaný asymptotický priebeh $\sim t^{-3}$. Teda vynásobením oboch strán v (155) faktorom $\left(\frac{1-U^2}{1-U_N^2}\right)^4$ a predefinovaním FF

$$F_{\gamma P}^s(t) = \tilde{F}_{\gamma P}^s(t) \left(\frac{1-U^2}{1-U_N^2} \right)^4, \quad (157)$$

dostávame UA model $F_{\gamma P}^s(t)$ s požadovanou asymptotikou, závisiaci iba od b_ω a b_ϕ určených vzťahmi (137), pričom hodnoty a_ω a a_ϕ sú známe z fitov experimentálnych údajov v kapitole 8. Pomocou vzťahov (137) a hodnôt a_ω , a_ϕ dostávame pre pomery väzbových konštánt všetkých pravých neutrálnych pseudoskalárnych mezónov

$$\begin{aligned} \pi^0 &: f_{\omega\gamma\pi^0}/f_\omega^s = -0.01019 \text{ GeV}^{-1}; & f_{\phi\gamma\pi^0}/f_\phi^s = +0.00966 \text{ GeV}^{-1}; \\ \eta &: f_{\omega\gamma\eta}/f_\omega^s = +0.00513 \text{ GeV}^{-1}; & f_{\phi\gamma\eta}/f_\phi^s = +0.03130 \text{ GeV}^{-1}; \\ \eta' &: f_{\omega\gamma\eta'}/f_\omega^s = +0.17821 \text{ GeV}^{-1}; & f_{\phi\gamma\eta'}/f_\phi^s = -1.60964 \text{ GeV}^{-1}. \end{aligned}$$



Obrázok 15: Predpovedané správanie absolútnej hodnoty podivného pFF η' mezónu

a predpoveď správania odpovedajúcich podivných prechodových FF pseudoskalárnych mezónov je zobrazená na obr. 13, 14 a 15.

Ako vidno z obrázkov, absolútna hodnota podivných pFF všetkých vyšetovaných pseudoskalárnych mezónov dosahuje pri $t = 0$ nulovú hodnotu, čo je v súlade s normovaním. Teda podivný pFF pri $t = 0$ vždy mení znamienko. Možno si tiež všimnúť strmší priebeh ako v prípade elektromagnetických pFF, čo je spôsobené asymptotikou podivných pFF $\sim t^{-3}$.

Všetky podivné pFF dosahujú maximum v oblasti ϕ píku.

V prípade η' mezónu dosahuje pík ϕ hodnotu až 7000 GeV^{-1} .

Pri konštrukcii UA modelu podivných pFF pseudoskalárnych mezónov je potrebné, z dôvodu neexistencie exp. údajov, fixovať prah t_s v hodnotách získaných fitovaním EM pFF príslušných mezónov.

10 Príspevky procesov elektrón-pozitrónovej anihilácie na $\phi\eta$ a pseudoskalárny (skalárny) mezón a fotón k $g - 2$ miónov

Magnetický moment miónu súvisí so spinom vzťahom

$$\vec{\mu} = g \left(\frac{e}{2m_\mu} \right) \vec{s}, \quad (158)$$

pričom z teoretickej predpovede [35] je gyromagnetický pomer g rovný presne 2. Avšak následkom interakcií existujúcich v prírode g zľahka prekračuje hodnotu 2 vďaka emisii a absorpcii virtuálnych fotónov, intermediálnych vektorových a Higgsových bozónov a vákuovej polarizácie do virtuálnych hadrónových stavov.

Z dôvodu teoretického popisu tejto odchýlky g bola zavedená magnetická anomália

$$a_\mu \equiv \frac{g-2}{2} = a_\mu^{(1)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) + (a_\mu^{(2)QED} + a_\mu^{(2)had}) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + a_\mu^{(2)weak} + O \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3, \quad (159)$$

kde α je konštanta jemnej štruktúry.

Miónový anomálny magnetický moment a_μ je zaujímavým objektom teoretického a experimentálneho výskumu. Je to zároveň najpresnejšie zmeraná fyzikálna veličina [36], [37]

$$\begin{aligned} a_{\mu^+}^{exp} &= (116592040 \pm 86) \times 10^{-11} \\ a_{\mu^-}^{exp} &= (116592140 \pm 85) \times 10^{-11}. \end{aligned} \quad (160)$$

Na druhej strane, presné teoretické (alebo skôr fenomenologické) určenie a_μ^{th} poskytuje dobrý test elektroslabej teórie. Nesúhlas medzi a_μ^{th} a a_μ^{exp} môže naznačiť opodstatnenosť novej fyziky za Štandardným Modelom (ŠM). Preto je dôležité čo najpresnejšie určenie a_μ^{th} .

Príspevky slabej interakcie, pochádzajúce z jedno- a dvojslučkových diagramov, sú rovné [38] - [40]

$$a_\mu^{(2,3)weak} = (152 \pm 4) \times 10^{-11}. \quad (161)$$

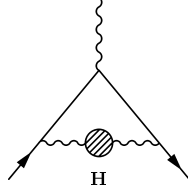
Príspevky QED do ôsmeho rádu dávajú hodnotu [41]

$$a_\mu^{QED} = (116584705.7 \pm 2.9) \times 10^{-11}. \quad (162)$$

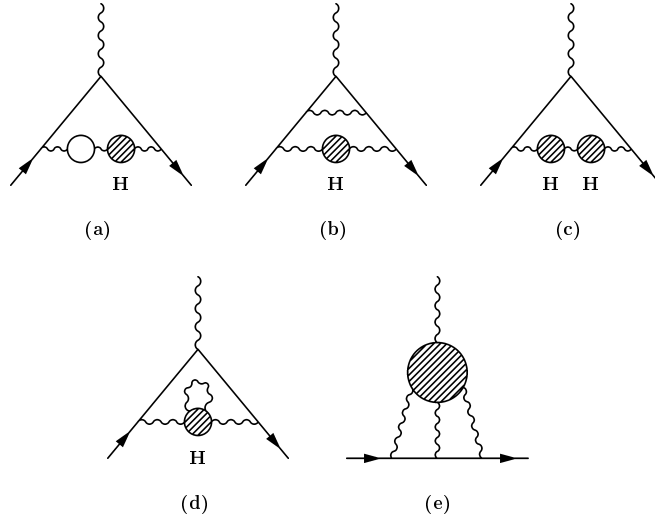
Hoci Kinoshita nedávno našiel v svojich výpočtoch programovú chybu [42], korekcia nie je dostatočne veľká na to, aby ovplyvnila porovnanie medzi

teóriou a experimentom pre miónovú anomáliu $g-2$, iba mení predpokladanú upresnenú hodnotu konštanty jemnej štruktúry.

Príspevky silných interakcií predstavujú Feynmanove diagramy na obr. 16 a 17.



Obrázok 16: Príspevok hadrónovej polarizácie vákuva najnižšieho rádu



Obrázok 17: Príspevky hadrónovej polarizácie vákuva tretieho rádu

Príspevky hadrónovej polarizácie vákuva najnižšieho rádu (obr. 16), počítané pomocou integrálu

$$a_{\mu}^{(2)had} = \frac{1}{4\pi^3} \left\{ \int_{m_{\pi^0}^2}^{3GeV^2} \sum_F \sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow F) K_{\mu}(t) dt + \int_{3GeV^2}^{\infty} R(e^+e^- \rightarrow had) \sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) K_{\mu}(t) dt \right\} \quad (163)$$

kde

$$K_{\mu}(t) = \int_0^1 \frac{x^2(1-x)}{x^2 + (1-x)t/m_{\mu}^2} dx, \quad (164)$$

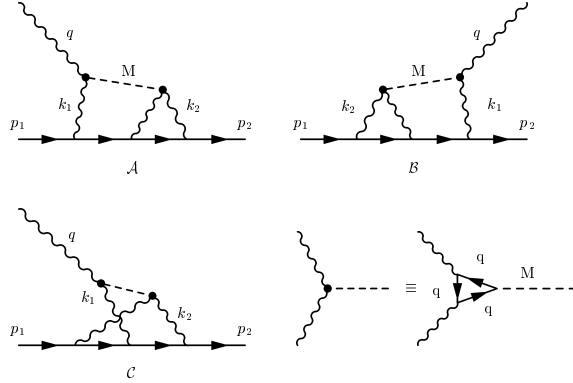
sú podľa posledných odhadov (ak uvažujeme len e^+e^- anihilačné účinné prierezy kvôli stále nevyriešenému problému nesúhlasu [43] s dátami τ rozpadu) rovné

$$a_\mu^{had}(l.o.) = (6969.5 \pm 80.7) \times 10^{-11}, \quad [44] \quad (165)$$

$$a_\mu^{had}(l.o.) = (6930.0 \pm 71.7) \times 10^{-11}, \quad [45]$$

$$a_\mu^{had}(l.o.) = (6961.5 \pm 63.7) \times 10^{-11}, \quad [46].$$

V nedávnej minulosti boli najdiskutovanejšími spomedzi všetkých hadrónových príspevkov light-by-light (LBL) mezónové pólové členy (pozri obr. 17e a 18).



Obrázok 18: Mezónové (M) pólové diagramy v treťom ráde hadrónových light-by-light rozptylových príspevkov k a_μ^{had} .

Do konca roku 2001 prevládal názor, že light-by-light mezónové pólové príspevky majú negatívne hodnoty. Nedávno však bolo jasne demonštrované [47], [48], že musia byť pozitívne, a že majú hodnotu

$$a_\mu^{LBL} = (80 \pm 40) \times 10^{-11} \quad [49] \quad (166)$$

$$a_\mu^{LBL} = (111.2 \pm 21.6) \times 10^{-11} \quad [50]$$

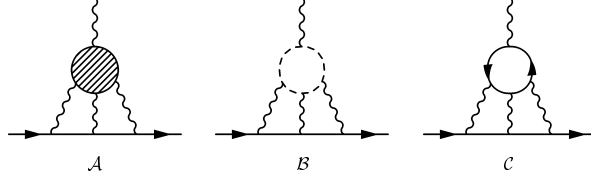
$$a_\mu^{LBL} = (136 \pm 25) \times 10^{-11} \quad [51].$$

Ďalšie trojslučkové hadrónové príspevky získané z hadrónových vákuových polarizácií (VP) na obr. 17a - 17d dosahujú hodnotu [52]

$$a_\mu^{(3)VP} = (-101 \pm 6) \times 10^{-11}. \quad (167)$$

Ak uvažujeme a_μ^{LBL} z [50], čo je takmer priemer všetkých troch hodnôt v (166), potom celková trojslučková hadrónová korekcia je

$$a_\mu^{(3)had} = (10.2 \pm 22.4) \times 10^{-11}, \quad (168)$$



Obrázok 19: Hadrónový light-by-light rozptylový príspevok tretieho rádu k a_μ^{had} (\mathcal{A}) a trieda pseudoskalárnych mezónových štvorcových slučkových diagramov (\mathcal{B}) a kvarkových štvorcových slučkových diagramov (\mathcal{C}) prispievajúcich k (\mathcal{A}).

kde chyby boli zložené v kvadrátoch.

Sčítaním všetkých prezentovaných príspevkov (161), (162), (165) a (168), nakoniec dostávame teoretickú predpoveď SM anomálneho magnetického momentu miónu

$$a_\mu^{th} = (116591832.6 \pm 82.7) \times 10^{-11}, \quad (169)$$

ktorá vedie k nasledujúcemu rozdielu medzi priemernou experimentálnou a teoretickou hodnotou

$$a_\mu^{exp} - a_\mu^{th} = (257.4 \pm 146.6) \times 10^{-11}. \quad (170)$$

Tento výsledok implikuje možnosť novej fyziky za ŠM. Avšak, stále sú možné spresnenia teoretickej hodnoty (169), ktoré môžu znížiť rozdiel (170). Máme na mysli hlavne procesy $e^+e^- \rightarrow \phi\eta$ a $e^+e^- \rightarrow P(S)\gamma$ (s $P=\pi^0$, η , η' a $S=\sigma$, a_0), ktorých príspevky ku $g-2$ miónu sa snažíme odhadnúť [53] pomocou unitárneho a analytického modelu prechodových FF $F_{\phi\eta}(t)$ a $F_{\gamma P(S)}(t)$ poskytujúceho tú istú analytickú funkciu pre priestorupodobnú a časupodobnú oblasť súčasne.

10.1 Proces $e^+e^- \rightarrow \phi\eta$

Príspevok od takého procesu k anomálnemu magnetickému momentu miónu možno vyhodnotiť dosadením totálneho účinného prierezu

$$\sigma(s) = \frac{\pi\alpha^2}{6s^3}(s + 2m_e^2) \left[\frac{[(s + m_\phi^2 - m_\eta^2)^2 - 4m_\phi^2 s]^3}{s(s - 4m_e^2)} \right]^{1/2} |F_{\phi\eta}|^2 \quad (171)$$

do vzťahu (163). Výsledok integrácie od prahu $(m_\phi + m_\eta)^2$ do 3.24 GeV^2 je rovný

$$a_\mu(\phi\eta) = 90.3 \times 10^{-11} \quad (172)$$

10.2 Procesy $e^+e^- \rightarrow P\gamma$

Pre každý prechod $\gamma^* \rightarrow P\gamma$ existuje jeden FF $F_{\gamma P}(t)$ úplne opisujúci správanie totálneho účinného prierezu

$$\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow \gamma P) = \pi\alpha^2/6(1 - m_P^2/t)^3 |F_{\gamma P}(t)|^2, \quad (173)$$

ktorý je definovaný parametrizáciou maticového elementu electromagnetického prúdu (115).

Dosadením UA modelu, (124) spolu s (132) a (133) pre $F_{\gamma P}$, do (163) a odpovedajúcou integráciou určíme nasledujúce hadrónové príspevky procesov $e^+e^- \rightarrow P\gamma$ k miónovej anomálii

$$\begin{aligned} a_\mu(\pi^0\gamma) &= 51.1 \times 10^{-11} \\ a_\mu(\eta\gamma) &= 28.5 \times 10^{-11} \\ a_\mu(\eta'\gamma) &= 16.5 \times 10^{-11}., \end{aligned} \quad (174)$$

ktoré, ako sa dalo očakávať, nesúhlasia s nedávnymi odhadmi [54], [55], [46] a [45].

10.3 Procesy $e^+e^- \rightarrow S\gamma$

Podobne ako v prípade UA modelu EM pFF pseudoskalárnych mezónov, môžeme konštruovať aj model pFF $F_{\gamma S}(t)$ skalárnych mezónov. Tiež platí

$$F_{\gamma S}(t) = F_{\gamma S}^{I=0}[U(t)] + F_{\gamma S}^{I=1}[V(t)] \quad (175)$$

kde

$$\begin{aligned} F_{\gamma S}^{I=0}[U(t)] = \left(\frac{1-U^2}{1-U_N^2}\right)^2 \left\{ \frac{1}{2}F_{\gamma S}(0)H_{\omega'}(U) + [D_\omega(U) - H_{\omega'}(U)]a_\omega^S \right. \\ \left. + [D_\phi(U) - H_{\omega'}(U)]a_\phi^S \right\} \end{aligned} \quad (176)$$

a

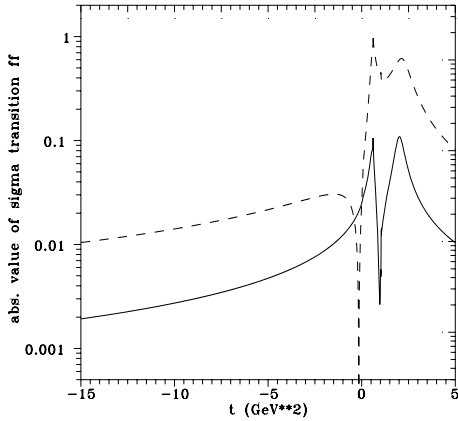
$$F_{\gamma S}^{I=1}[V(t)] = \left(\frac{1-V^2}{1-V_N^2}\right)^2 \left\{ \frac{1}{2}F_{\gamma S}(0)H_{\rho'}(V) + [D_\rho(V) - H_{\rho'}(V)]a_\rho^S \right\}, \quad (177)$$

pričom najnižšie body vetvenia pre izoskalárnu a izovektorovú časť FF sú $t_0^{I=0} = 9m_\pi^2$ a $t_0^{I=1} = 4m_\pi^2$. Efektívne body vetvenia t_s a t_v sú fixované pri typickej hodnote 1 GeV^2 , získanej pri fitovaní dát prechodových FF pseudoskalárnych mezónov, čo približne odpovedá prahu $K\bar{K}$. Hodnotu $F_{\gamma\sigma}(0)$

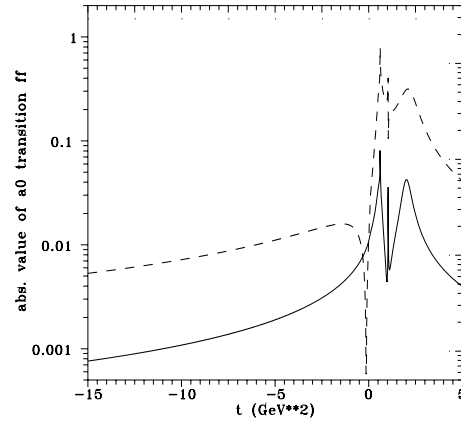
poznáme z dvojfotónovej šírky rozpadu $\Gamma(\sigma \rightarrow \gamma\gamma)=0.283$ keV odhadnutej v rámci Nambu-Jona-Lasinio modelu [56]. $F_{\gamma a_0}(0)$ je určené z experimentálnej hodnoty $\Gamma(a_0 \rightarrow \gamma\gamma)=0.24$ keV [46]. Pomery väzbových konštánt $a_V^S = (f_{VS\gamma}/f_V)$, $V = \sigma, a_0$ sú určené priemernými hodnotami $\bar{f} \equiv \bar{f}_{VS\gamma}$ predpovedanými teoreticky a uvedenými v tab. 1.

f [GeV^{-1}]	QCD sum rules	light cone QCD SR	iná metóda	\bar{f}
$\rho\sigma\gamma$	4.15 ± 0.78 [57]	2.85 ± 0.52 [60]	3.51 [63]	3.5
$\rho a_0\gamma$	1.69 ± 0.39 [58]	-	-	1.69
$\omega\sigma\gamma$	-	0.92 ± 0.10 [61]	0.14 ± 0.01 [64]	0.53
$\omega a_0\gamma$	0.57 ± 0.13 [58]	-	-	0.57
$\phi\sigma\gamma$	0.042 ± 0.009 [59]	0.039 ± 0.009 [62]	0.046 [65]	0.042
$\phi a_0\gamma$	0.12 ± 0.03 [59]	0.13 ± 0.03 [62]	0.16 [65]	0.14

Tabuľka 1: Väzbové konštanty $VS\gamma$



Obrázok 20: Prechodový FF σ



Obrázok 21: Prechodový FF a_0

Ich dosadením do vzťahov (175), dostávame $|F_{\gamma S}(t)|$ (zobrazené prerušovanými čiarami na obr. 20 a 21), na základe čoho odhadujeme príspevky procesov $e^+e^- \rightarrow S\gamma$ k a_μ^{th} pomocou prvého integrálu v (163) rovné $a_\mu(\sigma\gamma) = 1081.8 \times 10^{-11}$ a $a_\mu(a_0\gamma) = 84.5 \times 10^{-11}$. Tieto hodnoty indikujú, že väzbové konštanty v tab. 2 sú nadhodnotené. Našu hypotézu potvrdzuje článok Rekala a Tomasi-Gustafssona [66], ktorých odhad $f_{\rho\sigma\gamma}$ je desaťnásobne menší ako v tab. 2. Ak všetky priemerné hodnoty $\bar{f}_{VS\gamma}$ vydělíme faktorom 10,

získame priebehy $|F_{\gamma\sigma}(t)|$ a $|F_{\gamma a_0}(t)|$ ukázané spojitou čiarou na obr. 20 a 21 a prijateľné hodnoty príspevkov k anomálnemu magnetickému momentu miónu

$$\begin{aligned} a_\mu(\sigma\gamma) &= 12.46 \times 10^{-11} \\ a_\mu(a_0\gamma) &= 0.92 \times 10^{-11}. \end{aligned} \tag{178}$$

Keďže nemáme k dispozícii experimentálne údaje týkajúce sa prechodových FF skalárnych mezónov, odhad príspevkov $e^+e^- \rightarrow S\gamma$ k a_μ^{th} možno považovať iba za hypotetický a spoľahlivé hodnoty bude možné získať iba nameraním totálnych účinných prierezov procesov $e^+e^- \rightarrow \sigma\gamma$ a $e^+e^- \rightarrow a_0\gamma$.

11 Záver

Cieľom dizertačnej práce bolo rozšíriť unitárny a analytický prístup k popisu elektromagnetickej štruktúry hadrónov na neštandardné elektromagnetické formfaktory, ako sú prechodové formfaktory dvoch hadrónov s rôznymi hmotnosťami a prechodové formfaktory pseudoskalárnych (skalárnych) mezónov a im odpovedajúce podivné formfaktory.

Toto bolo iniciované doterajším vyhodnotením príspevkov procesov $e^+e^- \rightarrow \gamma P$ do anomálneho magnetického momentu miónu iba integráciou cez experimentálne hodnoty odpovedajúcich účinných prierezov, čo nie je najvhodnejší spôsob. Prax totiž ukázala, že využitím EM FF reprezentovaných unitárnymi a analytickými modelmi sa dosahujú vyhodnotenia s omnoho menšou chybou, čo je prvoradou prednosťou, ale v prípade vyššie spomenutých procesov existuje nekonzistentnosť medzi rôznymi výsledkami merania tých istých formfaktorov a preto bolo potrebné previesť analýzy údajov v rámci unitárneho a analytického prístupu a vylúčiť nekonzistentné údaje.

V prvej časti práce sa zhrnuli doterajšie poznatky o elektromagnetických formfaktoroch hadrónov a predemonštroval sa najznámejší model dominantnosti vektorových mezónov elektromagnetických formfaktorov.

Špeciálna kapitola (piata) je venovaná analytickým vlastnostiam formfaktorov, na ktorých spočíva rozpracovaný unitárny a analytický prístup k popisu správania sa formfaktorov.

Prvým originálnym výsledkom predkladanej dizertácie (šiesta kapitola) je vyriešenie klasického problému VMD modelu, kde na zabezpečenie požadovanej asymptotiky formfaktorov kvarkovým modelom hadrónov sa doteraz využívali asymptotické podmienky odvodené pre VMD model pomocou analytických vlastností FF, ktoré ale VMD model v sebe neobsahuje. Odvodením nových na prvý pohľad zložitejších asymptotických podmienok priamo z

VMD modelu a dokázaním ekvivalentnosti s predchádzajúcimi sa zlegalizovalo používanie starých jednoduchších podmienok na zabezpečenie korektnej asymptotiky formfaktorov.

Ďalšia časť dizertácie (ôsma kapitola) je venovaná konštrukcii unitárnych a analytických modelov prechodových FF hadrónov. Najskôr pre prechodový $\phi\eta$ formfaktor a potom pre prechodové formfaktory pseudoskalárnych mezónov. Zhromaždilo sa kvantum experimentálnej informácie o prechodových FF π^0 , η a η' mezónov v priestoropodobnej aj časupodobnej oblasti a previedli sa ich analýzy, na základe ktorej sa predpovedalo najrealistickejšie ich správanie v celej oblasti definície.

Potom v analógii s podivnými nukleónovými formfaktormi, ktorých nenulovosť demonštruje príspevok $s\bar{s}$ párov z mora do štruktúry nukleónov, sa v kapitole 9 dizertácie predpovedali podivné prechodové formfaktory.

Napokon sa poprvýkrát vyhodnotili príspevky procesov elektrón-pozitrónovej anihilácie na dve rôzne častice pomocou unitárnych a analytických modelov prechodových formfaktorov, ktoré demonštrujú opodstatnenosť ich využitia (kapitola 10).

Výsledky dizertačnej práce sú opublikované v štyroch zahraničných renomovaných časopisoch, boli prezentované na piatich medzinárodných konferenciách a najnovšie výsledky sú obsahom dvoch prác, z ktorých jedna je zaslaná do tlače a druhá je pripravená do tlače.

Referencie

- [1] R. Hofstadter, F. Bumiller, M. R. Yearian, Rev. Mod. Phys. **30** (1958) 483.
- [2] J. J. Sakurai, Currents and mesons, Univ. of Chicago Press, 1967.
- [3] S. Dubnička, O. Dumbrajs, Phys. Reports **19C** (1975) 141.
- [4] C. Adamuščin, S. Dubnička, A. Z. Dubničková, R. Pekarík, P. Weisenpacher, Eur. Phys. J. **C28** (2003) 115.
- [5] S. Dubnička, A. Z. Dubničková, P. Weisenpacher, Eur. Phys. J. **C32** (2003) 381.
- [6] R. Baldini, S. Pacetti: in *Proceedings of Hadron Structure '04 Int. Conf.*, Smolenice Castle, Slovak Republic 2004, (Eds. S. Dubnička, A. Z. Dubničková, P. Striženec, J. Urbán), Šafárik. Univ. Košice, 2005, p.196
- [7] A. Aloisio *et al.*: hep-exp/0107022
- [8] T. V. Dimova *et al.*: in *Proceedings of International Europhysics Conference on High-Energy Physics (HEP 2001)*, Budapest, Hungary 2001, hep2001/172.
- [9] R. Pekarík, Determination of transition $\Phi\eta$ form factors in unphysical region by unitary and analytic model (zaslané do tlače)
- [10] Review of Particle Physics, Phys. Lett. **B 592** (2004) 1.
- [11] S. J. Brodsky, G. P. Lepage, Phys. Rev. **D24** (1981) 1808.
- [12] S. Dubnička, A. Z. Dubničková, G. Pancheri, R. Pekarík, Nucl. Phys. **B** (Proc. Suppl.) **126** (2004) 71.
- [13] J. Gronberg *et al.* (CLEO collaboration), Phys. Rev. **D57** (1998) 33.
- [14] H.-J. Behrend *et al.* (CELLO collaboration), Z. Phys. **C49** (1991) 401.
- [15] H. Aihara *et al.* (TPC/2 γ collaboration), Phys. Rev. **D35** (1987) 2650.
- [16] H. Aihara *et al.* (TPC/2 γ collaboration), Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 172.
- [17] M. Acciarri *et al.* (L3 collaboration), CERN-PPE/97-110, (1997)
- [18] Ch. Berger *et al.* (PLUTO collaboration), Phys. Lett. **142** (1984) 125.

- [19] R. I. Djhelyadin et al., Phys. Lett. **94B** (1980) 548.
- [20] V. A. Viktorov et al., Sov. J. Nucl. Phys. **32(4)** (1980) 520.
- [21] M. N. Achasov et al., Eur. Phys. J. **C12** (2000) 25.
- [22] R. R. Akhmetshin et al., Phys. Lett. **B509** (2001) 217.
- [23] M. N. Achasov et al., Phys. Lett. **B559** (2003) 171.
- [24] R. R. Akhmetshin et al., Phys. Lett. **B605** (2005) 26.
- [25] S. Dubnička, A. Z. Dubničková, R. Pekarík, Pseudoscalar meson transition form factors revisited (pripravené do tlače)
- [26] B. Muller et al. (SAMPLE collaboration), Phys. Rev. Lett. **78** (1997) 3824.
- [27] K. A. Aniol et al., Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 1096.
- [28] D. T. Spayde et al. (SAMPLE collaboration), Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 1106.
- [29] R. L. Jaffe, Phys. Lett. **B229** (1989) 275.
- [30] T. D. Kohen, H. Forkel, M. Nielsen, Phys. Lett. **B316** (1993) 1.
- [31] H. Forkel, M. Nielsen, X. Jin, T. D. Kohen, Phys. Rev. **C50** (1994) 3108.
- [32] H. Forkel, Phys. Rev. **C56** (1997) 510.
- [33] A. Z. Dubničková, S. Dubnička, P. Weisenpacher, hep-ph/0102171 (2001)
- [34] A. Z. Dubničková, S. Dubnička, G. Pancheri, R. Pekarík, Fizika **B13** (2004) 295.
- [35] I. J. R. Aitchison and A. J. G. Hey: Gauge theories in particle physics, Institute of Physics Publishing, Briston and Philadelphia (2003)
- [36] G. W. Bennet et al., Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 101804-1.
- [37] G. W. Bennet et al., Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 161802-1.
- [38] G. Degrassi, G. F. Giudice, Phys. Rev. **D58** (1998) 53007.
- [39] A. Czarnecki, W. Marciano, Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) **B76** (1999) 245.

- [40] M. Knecht, S. Peris, M. Perrottet, E. de Rafael, JHEP 0211 (2002) 003.
- [41] V. H. Hughes, T. Kinoshita, Rev. Mod. Phys. **71** (1999) S133.
- [42] T. Kinoshita, M. Nio, Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 021803.
- [43] M. Davier, S. Eidelman, A. Höcker, Z. Zhang, Eur. Phys. J. **C27** (2003) 497.
- [44] S. Narison, Phys. Lett. **513B** (2001) 53.
- [45] M. Davier, S. Eidelman, A. Höcker, Z. Zhang, Eur. Phys. J. **C31** (2003) 503.
- [46] K. Hagiwara, A. D. Martin, D. Nomura, T. Teubner, Phys. Lett. **557B** (2003) 62.
- [47] M. Knecht, A. Nyffeler, Phys. Rev. **D65** (2002) 073034.
- [48] M. Knecht, A. Nyffeler, M. Perrottet, E. de Rafael, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 071802.
- [49] A. Nyffeler, hep-ph/0203347.
- [50] E. Bartoš, A. Z. Dubničková, S. Dubnička, E. A. Kuraev, E. Zemlyanaya, Nucl. Phys. **B632** (2002) 330.
- [51] K. Melnikov, hep-ph/0312226.
- [52] B. Krause, Phys. Lett. **B390** (1997) 392.
- [53] A. Z. Dubničková, S. Dubnička, A. Liptaj, G. Pancheri, R. Pekarík: Nucl. Phys. **B** (Proc. Suppl.) **131** (2004) 176
- [54] N. N. Achasov, A. V. Kiselev, Phys. Rev. **D65** (2002) 097302.
- [55] J. F. de Troconiz, F. J. Yndurain, Phys. Rev. **D65** (2002) 093001.
- [56] S. Dubnička, A. Z. Dubničková, M. Sečanský (to be published)
- [57] A. Gokalp, O. Yilmaz, Phys. Rev. **D64** (2001) 034012.
- [58] A. Gokalp, O. Yilmaz, Eur. Phys. J. **C22** (2001) 323.
- [59] A. Gokalp, O. Yilmaz, Acta Phys. Polonica **B33** (2002) 1313.
- [60] T. M. Aliev et al., Phys. Rev. **D65** (2002) 076004.

- [61] A. Gokalp, O. Yilmaz, hep-ph/0202091.
- [62] A. Gokalp, O. Yilmaz, hep-ph/0111072.
- [63] B. Friman, M. Soyeur, Nucl. Phys. **A600** (1996) 477.
- [64] A. Gokalp et al., Phys. Rev. **D67** (2003) 073008.
- [65] A. I. Titov et al., Phys. Rev. **C60** (1999) 035205.
- [66] M. Rekaló, E. Tomasi-Gustafsson, Nucl. Phys. **A714** (2003) 632.